6

CADRE STATIC DETERMINATE

Cadrele static determinate alcătuiesc o categorie de structuri, care, pe lîngă faptul că sînt des întîlnite în practică, au o mare importanță în rezolvarea sistemelor static nedeterminate prin metoda eforturilor.

Cadrele static determinate sînt alcătuite din una sau mai multe bare cotite, asamblate între ele prin legături interioare și fixate de teren cu trei sau mai multe legături simple (respectîndu-se numărul minim de legături necesar obținerii unei structuri indeformabile).

Calculul reacțiunilor se efectuează prin una din metodele indicate în capitolul I.

Trasarea diagramelor de eforturi se va face pe baza principiilor stabilite la grinda dreaptă și grinda cu console și articulații (cap. II și III).

La această categorie de structuri va trebui ca o dată cu dezvoltarea calculului să se urmărească intuirea fenomenului fizic al deformării structurii sub acțiunea sarcinilor.

Punctele în care două sau mai multe bare sînt legate între ele se numesc noduri. În noduri, barele pot fi articulate între ele sau încastrate (noduri rigide).

Prin deformare, unghiurile dintre bare se modifică într-un nod articulat și rămîn neschimbate într-un nod rigid.

La trasarea diagramelor de forță axială și forță tăietoare trebuie avut în vedere faptul că pentru două secțiuni din imediata apropiere a unui nod aceste eforturi își schimbă brusc valoarea, deoarece se modifică orientarea axei barelor la trecerea dintr-o parte în alta a nodului.

Pentru un nod alcătuit din două bare, momentul încovoietor are aceeași valoare pentru secțiunile din stînga și dreapta nodului; în diagramă, valoarea de pe o bară se transmite pe cealaltă, prin racordarea cu un arc de cerc. În cazul în care chiar în nod acționează un moment încovoietor concentrat (ca solicitare exterioară), în diagramă apare un salt. Valoarea momentului și fibra tensionată rezultă ușor din echilibru de nod.

Pentru verificarea exactității calculelor se utilizează curent echilibrul nodurilor. Se secționează infinit aproape de nod toate barele care alcătuiesc nodul și se pun în evidență eforturile din secțiunile respective (eventual forțele exterioare ce acționează în nod). Sub acțiunea eforturilor și a forțelor exterioare, nodul trebuie să fie în echilibru, deci trebuie verificate ecuațiile de echilibru static: $\Sigma X=0$, $\Sigma Y=0$ și $\Sigma M=0$.

O particularitate deosebită prezintă rezolvarea cadrelor simetrice în raport cu o axă, simetria referindu-se atît la elementele geometrice cît și la legăturile interioare și cu terenul.

Sistemele simetrice pot fi încărcate simetric, antisimetric sau oarecum (asimetric). O încărcare oarecare se poate descompune într-o încărcare simetrică și o încărcare antisimetrică, rezultatul final obținîndu-se prin suprapunerea efectelor.

La cadrele simetrice încărcate simetric, reacțiunile, diagramele N și M sînt simetrice, iar diagrama T este antisimetrică.

La cadrele simetrice încărcate antisimetric, reacțiunile, diagramele N și M sînt antisimetrice, iar diagrama T este simetrică.

Observațiile de mai sus dau posibilitatea unei rezolvări mai rapide a acestui gen de probleme.

Determinarea unui efort oarecare dintr-o secțiune fără a se rezolva întregul sistem sau verificarea exactității unui efort determinat pe cale analitică se poate face utilizînd linia de influență a efortului respectiv, așa cum se arată într-o serie de exemple din ultima parte a acestui capitol.

APLICAȚII

Să se traseze diagramele de eforturi — indicate în fiecare caz în parte — la cadrele următoare:

Problema VI.1. Diagramele N, T și M (fig. VI.1).

Calculul reacțiunilor:

$$\Sigma Y=0;\quad V_A+V_B-2\cdot 6=0\quad \Sigma X=0;\quad H_A=0\quad V_B=8 \text{ tf};\quad V_A=4 \text{ tf}.$$
$$\Sigma M_A=0;\quad 2\cdot 6\cdot 6-V_B\cdot 9=0$$

Calculul eforturilor

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}};\ \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$N_{AC}=-V_A\cdot\cos\alpha=-4\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=-1{,}6\sqrt{5}$$

$$N_{CB}=0$$

$$T_{AC}=V_A\sin\alpha=4\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}=0{,}8\sqrt{5}\ \text{tf}$$

$$T_{CB}=V_A-p\cdot x;\quad x=0;\quad T=V_A=4\ tf\quad x=l;\quad T=V_A-pl=-8\ \text{tf}.$$

$$M_C=V_A\cdot 3=12\ \text{tfm}.$$

În secțiunea în care momentul este maxim, forța tăietoare se anulează.

$$T_x=V_A-p\cdot x=4-2\cdot x;\quad T_x=0;\quad x=2\ \text{m}$$

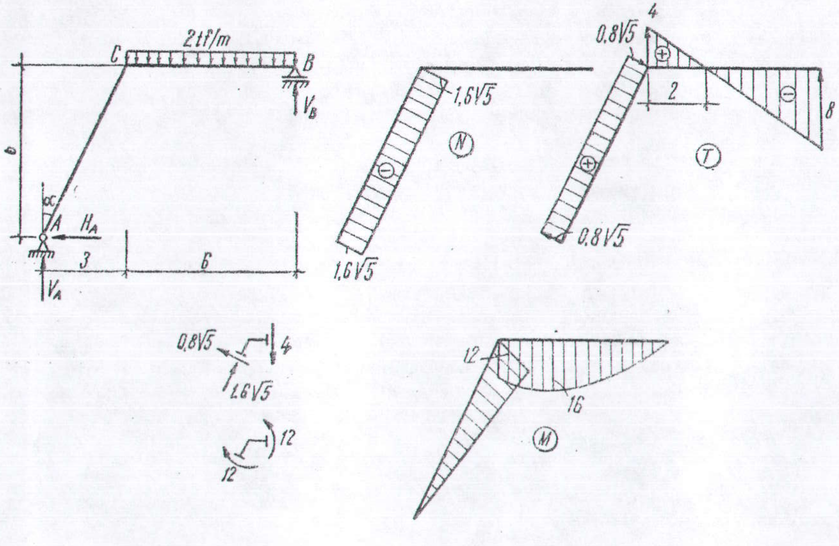


Fig. IV.1.

Forța tăietoare se anulează pe riglă la 2 m de nodul C.

$$M_{max}=V_A\cdot 5-2\frac{x^2}{2}=20-4=16\ \text{tfm}$$

Verificarea echilibrului nodului C:

$$\Sigma X=0;\quad T_{CA}\cdot\cos\alpha-N_{CA}\cdot\sin\alpha=0$$

$$0{,}8\sqrt{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}-1{,}6\sqrt{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}=0$$

$$\Sigma Y=0;\quad -T_{CB}+N_{CA}\cdot\cos\alpha+T_{CA}\cdot\sin\alpha=0$$

$$-4+1{,}6\sqrt{5}\cdot\frac{2}{5}+0{,}8\sqrt{5}\cdot\frac{1}{5}=0$$

$$\Sigma M=0;\quad M_{CA}-M_{CB}=0;\quad 12-12=0.$$

Problema VI.2. Diagramele N, T și M (fig. VI.2).

Calculul reacțiunilor:

$$\Sigma X=0;$$

$$-H_A+3=0;\quad H_A=3\ \text{tf}$$

$$\Sigma M_A=0;$$

$$3\cdot 10-V_B\cdot 6=0;$$

$$V_B=5\ \text{tf};\quad V_A=V_B=5\ \text{tf}.$$

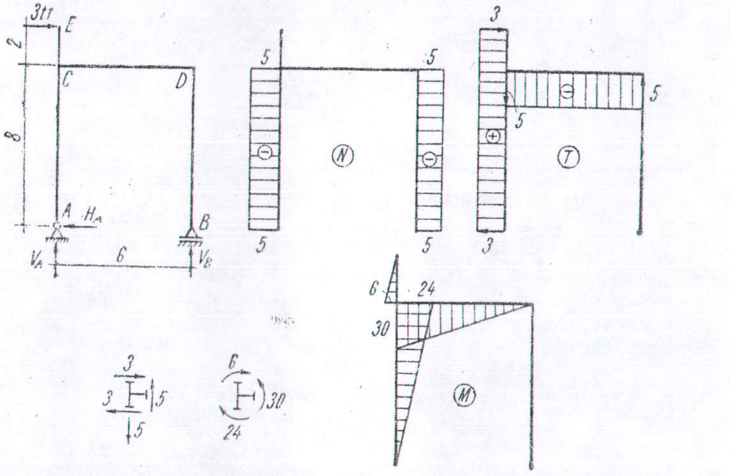


Fig. VI.2.

Calculul eforturilor:

$$N_{AC}=+V_A=+5\ \text{tf}$$

$$N_{CD}=0$$

$$N_{DB}=-V_B=-5\ \text{tf}$$

$$T_{ACE}=+H_A=+3\ \text{tf}$$

$$T_{CD}=-V_A=-5\ \text{tf}$$

$$T_{DB}=0$$

$$M_{CA}=H_A\cdot 8=24\ \text{tfm}$$

$$M_{CD}=V_B\cdot 6=30\ \text{tfm}$$

$$M_{CE}=3\cdot 2=6\ \text{tfm}$$

Problema VI.3 (fig. VI.3). Pentru structura de la problema VI.2, păstrind dimensiunile și încărcările, schimbînd numai articulația din A în B, să se traseze diagramele de eforturi N, T și M.

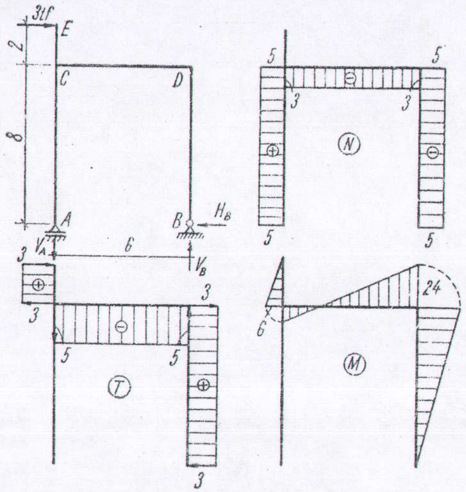
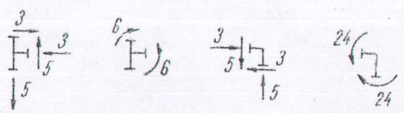


Fig. VI.3.



Calculul reacțiunilor:

$$\sum X=0; \quad -H_B+3=0; \quad H_B=3 \text{ tf}$$

$$\sum M_B=0; \quad 3\cdot 10-V_A\cdot 6=0$$

$$V_A=5 \text{ tf}; \quad V_B=V_A=5 \text{ tf}.$$

Echilibrul nodurilor:

Nodul C:

$$\sum X=3-3=0 \qquad \sum M=6-6=0$$
$$\sum Y=5-5=0.$$

Nodul D:

$$\sum X=3-3=0 \qquad \sum M=24-24=0$$
$$\sum Y=5-5=0.$$

Scriind ecuațiile de echilibru static, rezultă că pentru fiecare nod acestea sînt satisfăcute.

Problema VI.4. Diagramele N, T și M (fig. VI.4).

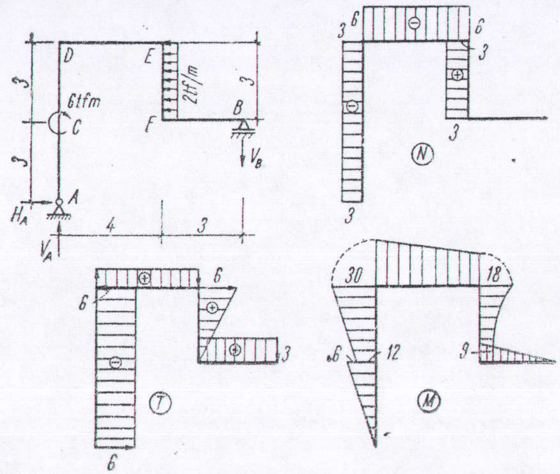


Fig. VI.4.

Calculul reacțiunilor:

$$\sum X=0; \quad H_A-2\cdot 3=0; \quad H_A=6 \text{ tf}$$

$$\sum M_A=0; \quad 6-2\cdot 3\cdot 4{,}5+V_B\cdot 7=0; \quad V_B=3 \text{ tf}$$

$$\sum Y=0; \quad V_A-V_B=0; \quad V_A=V_B=3 \text{ tf}.$$

Calculul eforturilor:

$N_{ACD}=-V_A=-3$ tf $\qquad T_{FB}=+V_B=+3$ tf.

$N_{DE}=-H_A=-6$ tf $\qquad M_A=0$

$N_{EF}=+V_B=+3$ tf $\qquad M_{CA}=18$ tfm

$N_{FB}=0$ $\qquad M_{CD}=18-6=12$ tfm

$T_{ACD}=-H_A=-6$ tf $\qquad M_{DC}=H_A\cdot 6-6=30$ tfm

$T_{DE}=+V_A=+3$ tf $\qquad M_{DE}=M_{DC}=30$ tfm

$T_{EF}=+H_A=6$ tf $\qquad M_{FB}=V_B\cdot 3=9$ tfm

$T_{FE}=H_A-2\cdot 3=0$ $\qquad M_{EF}=V_B\cdot 3+2\cdot 3\cdot 1{,}5=18$ tfm

În secțiunea C, din cauza momentului concentrat va apărea în diagrama de moment încovoietor un salt, după care diagrama are aceeași variație și aceeași pantă (pe porțiunea de stîlp CD nemaiexistînd altă solicitare exterioară).

Problema VI.5. Diagramele N, T și M (fig. VI.5).

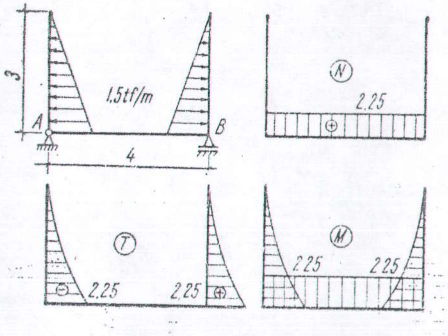


Fig. VI.5.

Reacțiunile:

$$V_A=V_B=0;\quad H_A=0.$$

Problema VI.6. Diagramele N, T și M (fig. VI.6).

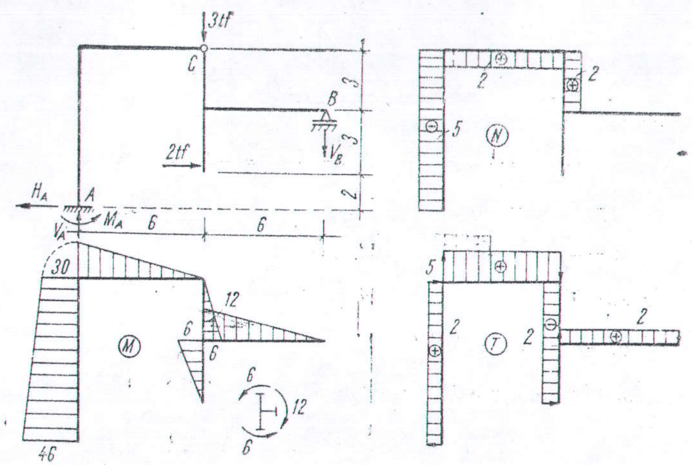


Fig. VI.6.

Calculul reacțiunilor:

$$M_{iC}=0;\quad V_B\cdot 6-2\cdot 6=0;\quad V_B=2\ \text{tf}$$

$$V_A-3-2=0;\quad V_A=5\ \text{tf};\quad H_A=2\ \text{tf}$$

$$-M_A+2\cdot 12+2\cdot 2+3\cdot 6=0\quad M_A=46\ \text{tfm}.$$

Problema VI.7. Diagramele N, T și M (fig. VI.7).

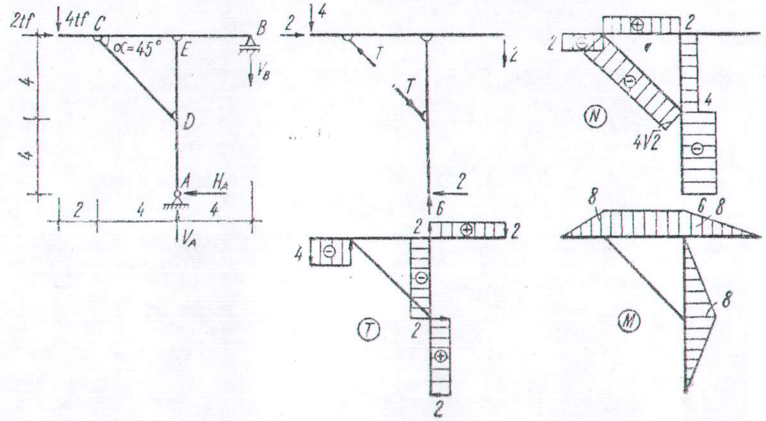


Fig. VI.7.

Calculul reacțiunilor:

$$\sum M_A=0;\quad 2\cdot 8-4\cdot 6+V_B\cdot 4=0$$

$$V_B=2\ \text{tf};\quad V_A=6\ \text{tf};\quad H_A=2\ \text{tf}$$

$$M_{iE}=0;\quad V_A\cdot 8-T\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 4=0;\quad T=4\sqrt{2}\ \text{tf}.$$

Problema VI.8. Diagramele N, T și M (fig. VI.8).

Calculul reacțiunilor:

$$\sum M_B=0;\quad 1\cdot 8\cdot 4-V_A\cdot 8=0;\quad V_A=4\ \text{tf}$$

$$\sum Y=0;\quad -V_A+V_B=0;\quad V_B=4\ \text{tf}$$

$$M_{iC}=0;\quad -V_B\cdot 3+H_b\cdot 8=0;\quad H_B=1{,}5\ \text{tf}$$

$$\sum X=0;\quad H_A+H_B-1\cdot 8=0;\quad H_A=6{,}5\ \text{tf}.$$

Calculul momentului maxim:

$$T_x=0\quad T_x=H_A-p\cdot x=6{,}5-px=0\quad x=6{,}5\ \text{m}$$

$$M_{max}=H_A\cdot 6{,}5-1\cdot 6{,}5\cdot\frac{6{,}5}{2}=21{,}125\ \text{tfm},$$

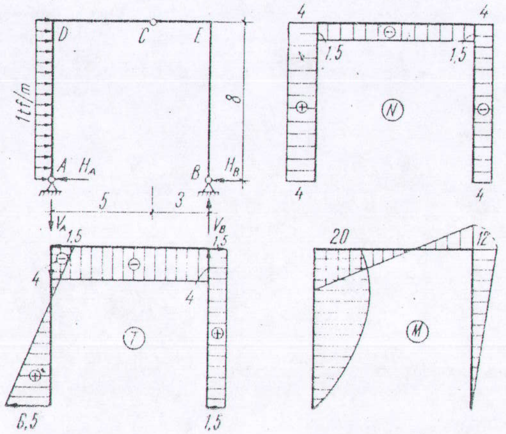


Fig. VI.8.

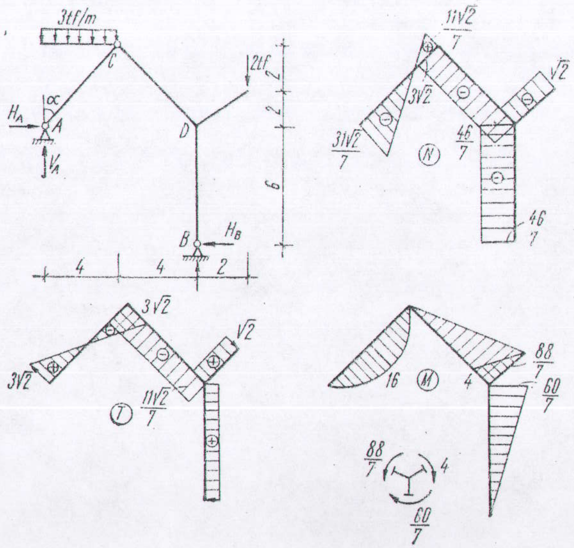


Fig. VI.9.

Problema VI.9. Diagramele N, T și M (fig. VI.9).

Calculul reacțiunilor:

(1) $\sum X=0 \quad H_A-H_B=0$

(2) $\sum Y=0 \quad V_A-3\cdot 4+V_B-2=0$

(3) $\sum M_B=0 \quad V_A\cdot 8+H_A\cdot 6-3\cdot 4\cdot 6+2\cdot 2=0$

(4) $M_{iC}=0 \quad V_A\cdot 4-H_A\cdot 4-3\cdot 4\cdot 2=0$

Din ecuația (4) rezultă: $V_A=H_A+6$.

Introducînd în ecuația (3) se obține:

$$8H_A+48+6H_A-72+4=0; \quad 14H_A=20$$

$$H_A=\frac{10}{7}\ \text{tf}=H_B \text{ și în continuare}$$

$$V_A=\frac{10}{7}+6=\frac{52}{7}\ \text{tf}; \quad V_B=\frac{52}{7}+14=\frac{46}{7}\ \text{tf}.$$

Calculul eforturilor:

$$N_{AC}=-(V_A\cos\alpha+H_A\sin\alpha)=-\left(\frac{52}{7}+\frac{10}{7}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{31\sqrt{2}}{7}\ \text{tf}$$

$$N_{CA}=-\frac{31\sqrt{2}}{7}+3\cdot 4\frac{\sqrt{2}}{2}=+\frac{11\sqrt{2}}{7}\ \text{tf}$$

$$N_{CD}=+V_A\frac{\sqrt{2}}{2}-H_A\frac{\sqrt{2}}{2}-3\cdot 4\frac{\sqrt{2}}{2}=-3\sqrt{2}\ \text{tf}$$

$$T_{AC}=+V_A\frac{\sqrt{2}}{2}-H_A\frac{\sqrt{2}}{2}=+3\sqrt{2}\ \text{tf}$$

$$T_{CA}=+3\sqrt{2}-3\cdot 4\frac{\sqrt{2}}{2}=-3\sqrt{2}\ \text{tf}$$

$$T_{CD}=+V_A\frac{\sqrt{2}}{2}+H_A\frac{\sqrt{2}}{2}-3\cdot 4\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{11\sqrt{2}}{7}\ \text{tf}$$

$$M_{max\ AC}=\frac{pl^2}{8}=\frac{3\cdot 4^2}{8}=6\ \text{tfm}.$$

Problema VI.10. Diagramele N, T și M (fig. VI.10).

Calculul reacțiunilor:

$$\sum M_B=0; \quad V_A\cdot 12-4\cdot 9-2\cdot 9=0; \quad V_A=4{,}5\ \text{tf}.$$

$$\sum Y=0; \quad V_A-4-V_B=0; \quad V_B=0{,}5\ \text{tf}.$$

$$M_{iC}=0;\quad V_A\cdot 6-H_A\cdot 12-4\cdot 3=0;\quad H_A=1{,}25\ \text{tf}.$$

$$\sum X=0;\quad H_A+H_B-2=0;\quad H_B=0{,}75\ \text{tf}.$$

Calculul eforturilor:

$$N_{EC}=-V_A\sin\alpha-H_A\cos\alpha+4\cdot\sin\alpha;\quad \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}};\quad \cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$N_{EC}=-\frac{3}{\sqrt{5}}\ \text{tf}$$

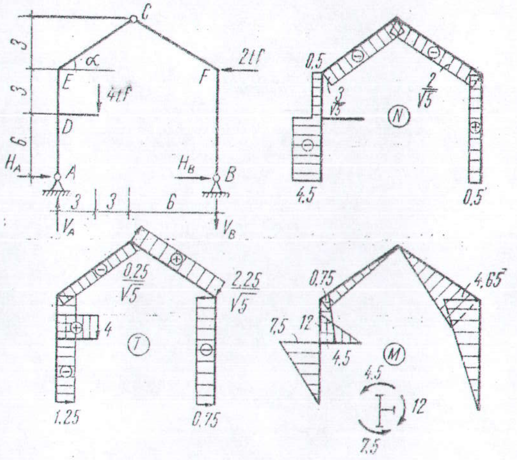


Fig. VI.10.

$$N_{FC}=+V_B\sin\alpha+H_B\cos\alpha-2\cdot\cos\alpha;\quad N_{FC}=-\frac{2}{\sqrt{5}}\ \text{tf}$$

$$T_{EC}=+V_A\cos\alpha-H_A\sin\alpha-4\cdot\cos\alpha;\quad T_{EC}=-\frac{0{,}25}{\sqrt{5}}\ \text{tf}$$

$$T_{CF}=V_A\cos\alpha+H_A\sin\alpha-4\cos\alpha;\quad T_{CF}=+\frac{2{,}25}{\sqrt{5}}\ \text{tf}.$$

Problema VI.11. Diagramele N, T și M (fig. VI.11).
Calculul reacțiunilor:

$$\sum M_B=0;\quad V_A\cdot 8-H_A\cdot 3-18+3\cdot 2=0$$

$$M_{iC}=0;\quad V_A\cdot 2+H_A\cdot 6-18=0;\quad H_A=\frac{9-V_A}{3}\ \text{tf}$$

$$\sum M_B=0;\quad V_A\cdot 8-3\cdot\frac{9-V_A}{3}-12=0;\quad V_A=\frac{7}{3}\ \text{tf}$$

$$H_A=\frac{9-\frac{7}{3}}{3}=\frac{20}{9}\ \text{tf}$$

$$\sum Y=0;\quad V_A+V_B-3=0;\quad V_B=\frac{2}{3}\ \text{tf}$$

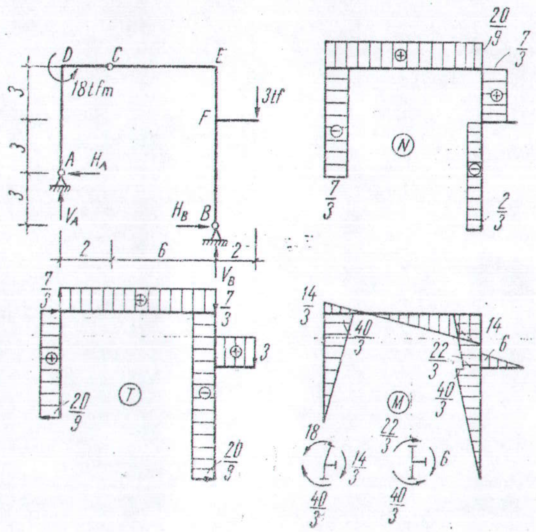


Fig. VI.11.

$$\sum X=0;\quad H_A-H_B=0;\quad H_B=\frac{20}{9}\ \text{tf}.$$

Calculul eforturilor:

$$M_{DC}=H_A\cdot 6-18=-\frac{14}{3}\ \text{tfm}$$

$$M_{FE}=-H_B\cdot 6+3\cdot 2=-\frac{22}{3}\ \text{tfm}.$$

Problema VI.12. Diagramele N, T și M (fig. VI.12).
Calculul reacțiunilor:

$$M_{iC}^{d}=0;\quad 4\cdot 2-V_B\cdot 4=0;\quad V_B=2\ \text{tf}$$

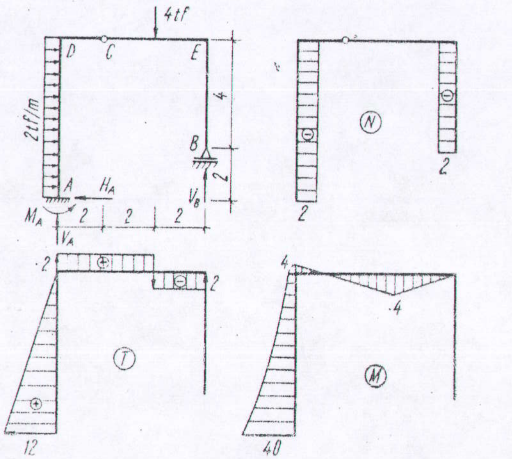


Fig. VI.12.

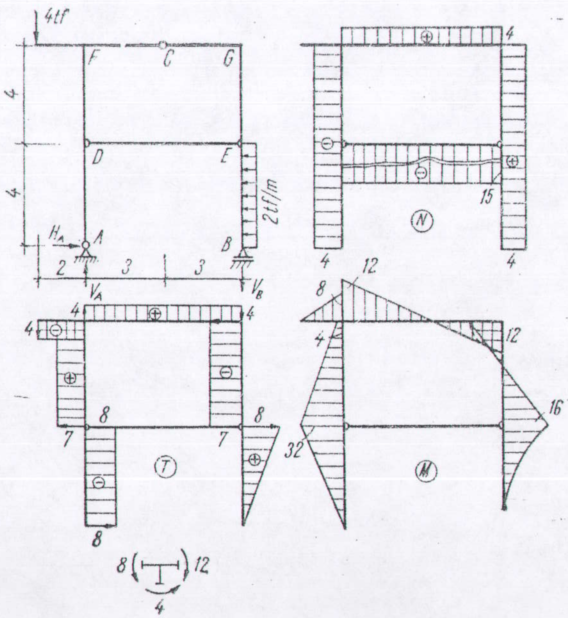


Fig. VI.13.

$$\sum Y=0;\quad V_A+V_B-4=0;\quad V_A=2 \text{ tf}$$

$$\sum X=0;\quad 2\cdot 6-H_A=0;\quad H_A=12 \text{ tf}$$

$$M_{iC}^{s}=0;\quad V_A\cdot 2+H_A\cdot 6-M_A-2\cdot 6\cdot 3=0;\quad M_A=40 \text{ tfm}.$$

Calculul eforturilor:

$$M_D=+H_A\cdot 6-40-2\cdot 6\cdot 3=-4 \text{ tfm}.$$

Problema VI.13. Diagramele N, T și M (fig. VI.13).

Calculul reacțiunilor:

$$\sum M_B=0;\quad V_A\cdot 6-4\cdot 8-2\cdot 4\cdot 2=0$$

$$V_A=8 \text{ tf};\quad V_B=4 \text{ tf};\quad H_A=8 \text{ tf}.$$

Efortul în tirant se determină scriind ecuația de moment încovoietor zero în articulația interioară C:

$$M_{iC}=0;\quad -4\cdot 5+V_A\cdot 3-H_A\cdot 8+T\cdot 4=0;\quad T=15 \text{ tf}.$$

Problema VI.14. Diagramele N, T și M (fig. VI.14).

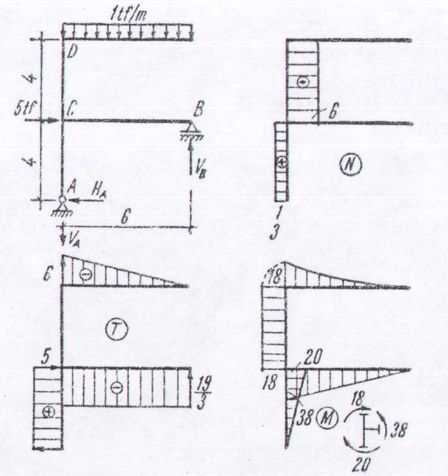


Fig. VI.14.

Calculul reacțiunilor:

$$\sum M_A=0;\quad -V_B\cdot 6+5\cdot 4+1\cdot 6\cdot 3=0;\quad V_B=\frac{19}{3} \text{ tf}$$

$$\sum Y=0;\quad -V_A-1\cdot 6+\frac{19}{3}=0;\quad V_A=\frac{1}{3} \text{ tf}$$

$$\sum X=0;\quad H_A=5 \text{ tf}.$$

Problema VI.15. Diagramele N, T și M (fig. VI.15)

Calculul reacțiunilor:

$$M^s_{iD}=0;\quad V_A\cdot 4-2\cdot 4\cdot 2=0;\quad V_A=4\ \text{tf}$$

$$\sum M_B=0;\quad V_A\cdot 6-2\cdot 6\cdot 3-2\cdot 5+V_C\cdot 6=0;\quad V_C=\frac{11}{3}\ \text{tf}$$

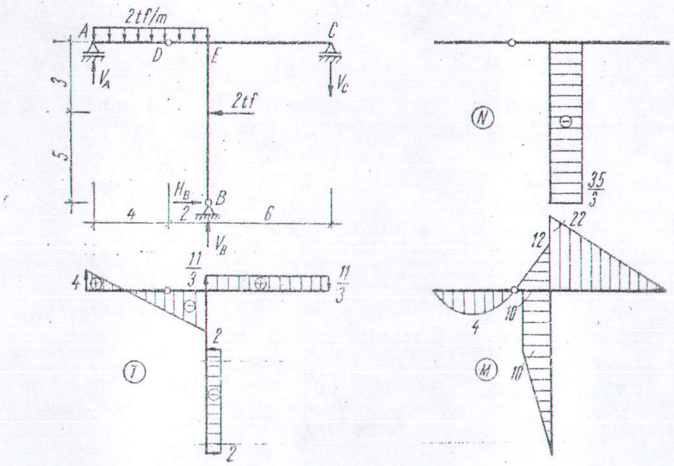


Fig. VI.15.

$$\sum Y=0;\quad V_A-2\cdot 6-V_C+V_B=0;\quad V_B=\frac{35}{3}\ \text{tf}$$

$$\sum X=0;\quad H_B=2\ \text{tf}.$$

Problema VI.16. Diagramele N, T și M (fig. VI.16).

Calculul reacțiunilor:

$$\sum M_B=0;\quad V_A\cdot 8-2\cdot 8-2\cdot 3\cdot 4{,}5-4\cdot 8=0;\quad V_A=9{,}375\ \text{tf}$$

$$\sum Y=0;\quad V_A-V_B-2-2\cdot 3=0;\quad V_B=1{,}375\ \text{tf}$$

$$M_{iC}=0;\quad V_B\cdot 3+H_B\cdot 6-4\cdot 2=0;\quad H_B=0{,}646\ \text{tf};\quad H_A=4{,}646\ \text{tf}:$$

Calculul eforturilor:

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}};\qquad \cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$T_A=9{,}375\,\frac{1}{\sqrt{10}}-4{,}646\,\frac{3}{\sqrt{10}}=-4{,}56\,\frac{1}{\sqrt{10}}=-1{,}44\ \text{tf}$$

$$N_A=-9{,}375\,\frac{3}{\sqrt{10}}-4{,}646\,\frac{1}{\sqrt{10}}=-32{,}74\,\frac{1}{\sqrt{10}}=-10{,}35\ \text{tf}.$$

Problema VI.17. Diagramele N, T și M (fig. VI.17).

Calculul reacțiunilor:

$$\sum M_B=0;\quad V_A\cdot 12-3\cdot 10+1{,}5\cdot 4\cdot 2+H_A\cdot 2=0$$

$$M_{iC}=0;\quad V_A\cdot 6+H_A\cdot 8-3\cdot 4=0.$$

$$V_A=1{,}43\ \text{tf};\quad H_A=0{,}425\ \text{tf};\quad V_B=1{,}57\ \text{tf};\quad H_B=5{,}575\ \text{tf}.$$

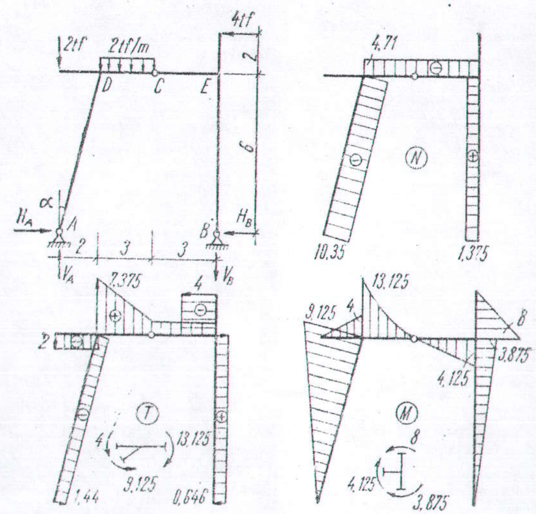


Fig. VI.16.

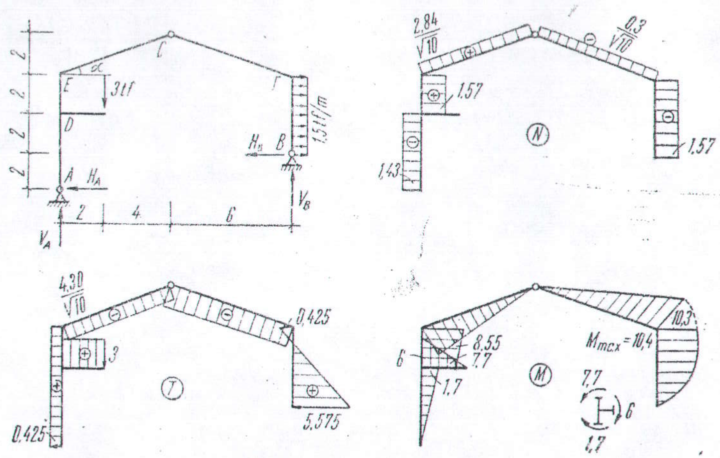


Fig. VI.17.

Calculul eforturilor:

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}; \quad \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$N_{EC} = -V_A \sin\alpha + H_A \cos\alpha + 3\sin\alpha = \frac{2{,}84}{\sqrt{10}}\ \text{tf}$$

$$N_{FC} = -V_B \sin\alpha - H_B \cos\alpha + 6\cos\alpha = -\frac{0{,}30}{\sqrt{10}}\ \text{tf}$$

$$T_{EC} = 1{,}57\cos\alpha - 0{,}425\sin\alpha = \frac{4{,}30}{\sqrt{10}}\ \text{tf}$$

$$T_{FC} = 4{,}30\frac{1}{\sqrt{10}}\ \text{tf}$$

$$T^x_{BF} = H_B - 1{,}5\cdot x = 0 \quad x = \frac{5{,}575}{1{,}5} = 3{,}71\ \text{m}$$

$$M_{max} = 5{,}575\cdot 3{,}71 - 1{,}5\cdot\frac{3{,}71^2}{2} = 10{,}4\ \text{tfm.}$$

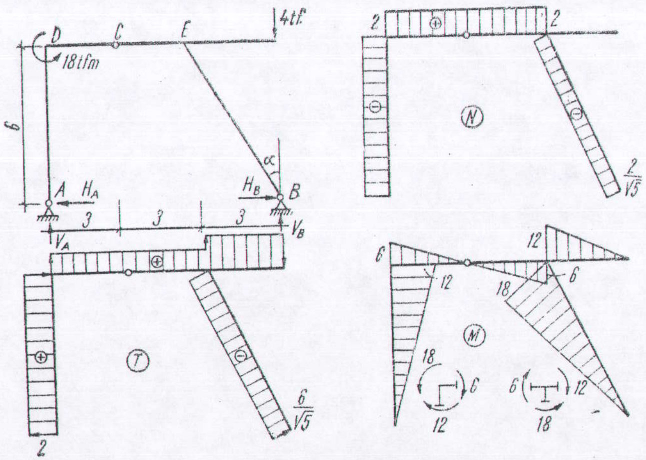


Fig. IV.18.

Problema VI.18. Diagramele N, T și M (fig. VI.18).
Calculul reacțiunilor:

$$\sum M_B = 0; \quad V_A\cdot 9 - 18 = 0; \quad V_A = 2\ \text{tf}$$

$$\sum Y = 0; \quad V_A + V_B - 4 = 0; \quad V_B = 2\ \text{tf}$$

$$M_{iC} = 0; \quad V_A\cdot 3 - 18 + H_A\cdot 6 = 0; \quad H_A = 2\ \text{tf}; \quad H_A = H_B = 2\ \text{tf.}$$

Calculul eforturilor:

$$N_{BE} = -V_B \cos\alpha + H_B \sin\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}\ \text{tf}$$

$$T_{BE} = H_B \cos\alpha + V_B \sin\alpha = \frac{6}{\sqrt{5}}\ \text{tf.}$$

Problema VI.19. Diagramele N, T și M (fig. VI.19).
Calculul reacțiunilor:

$$\sum M_B = 0; \quad V_A\cdot 20 - 2{,}5\cdot 20 - 1\cdot 10\cdot 5 = 0$$

$$V_A = 5\ \text{tf}; \quad V_B = 7{,}5\ \text{tf.}$$

$$M_{iC} = 0; \quad V_A\cdot 10 - 2{,}5\cdot 10 - H_A\cdot 6 = 0;$$

$$H_A = 4{,}16\ \text{tf}; \quad H_B = 4{,}16\ \text{tf.}$$

Calculul eforturilor:

$$\alpha = 45°$$

$$N_{AD} = -V_A \sin\alpha - H_A \cos\alpha = -9{,}16\frac{\sqrt{2}}{2} = -4{,}58\sqrt{2}\ \text{tf}$$

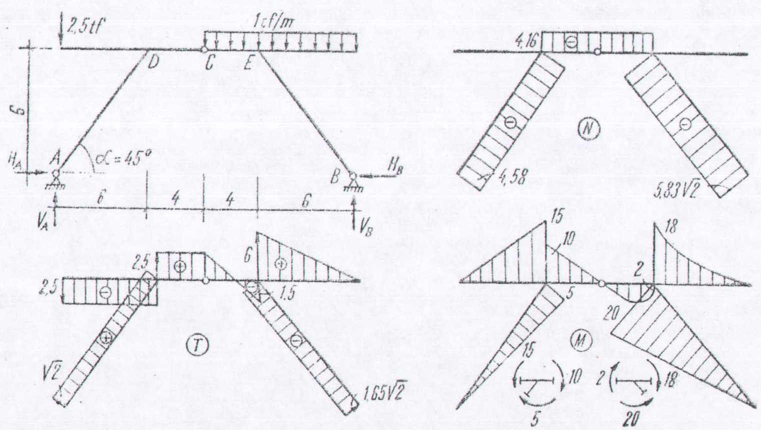


Fig. VI.19.

$$N_{BE} = -V_B \sin\alpha - H_B \cos\alpha = -11{,}66\frac{\sqrt{2}}{2} = -5{,}83\sqrt{2}\ \text{tf}$$

$$T_{AD} = V_A \cos\alpha - H_A \sin\alpha = 0{,}84\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}42\sqrt{2}\ \text{tf}$$

$$T_{BE} = H_B \sin\alpha - V_A \cos\alpha = -3{,}34\frac{\sqrt{2}}{2} = -1{,}67\sqrt{2}\ \text{tf}$$

$$M_{DA} = V_A\cdot 6 - H_A\cdot 6 = 5\ \text{tfm,}$$

Problema VI.20. Diagramele N, T și M (fig. VI.20).
Calculul reacțiunilor:

$$\sum M_B=0;\quad V_A\cdot 6-1\cdot 6\cdot 3=0;\quad V_A=3\ \text{tf}$$

$$\sum M_D=0;\quad V_A\cdot 16-1\cdot 6\cdot 13-8+8+5\cdot 2+V_C\cdot 8=0$$

$$V_C=2{,}5\ \text{tf};\quad V_D=5{,}5\ \text{tf}$$

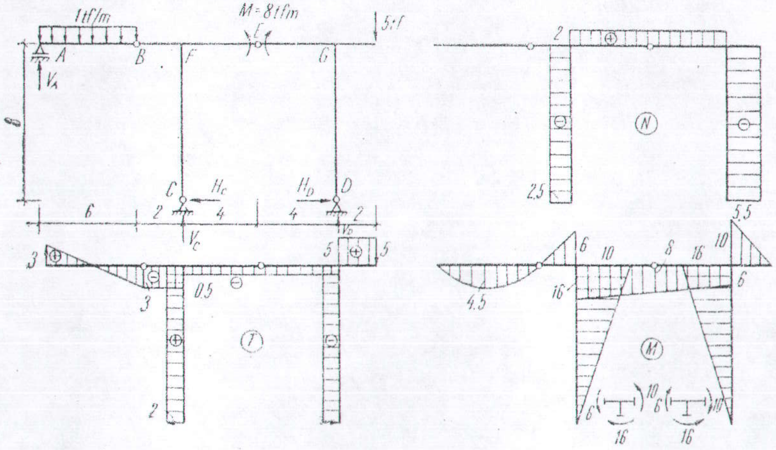


Fig. VI.20.

$$M_{iE}^{d}=0;\quad 5\cdot 6+8-V_D\cdot 4-H_D\cdot 8=0.$$

$$H_D=2\ \text{tf};\quad H_C=H_D=2\ \text{tf}.$$

Problema VI.21. Diagramele N, T și M (fig. VI.21).
Calculul reacțiunilor:

$$M_{iE}^{d}=0;\quad -V_D\cdot 3+3\cdot 4=0;\quad V_D=4\ \text{tf}$$

$$M_{iB}^{s}=0;\quad -V_A\cdot 4+12=0;\quad V_A=3\ \text{tf}$$

$$\sum Y=0;\quad -V_C-V_A+V_D=0;\quad V_C=1\ \text{tf}$$

$$\sum X=0;\quad H_C=3\ \text{tf}$$

$$\sum M_C=0;\quad M_C-V_D\cdot 6-3\cdot 4-V_A\cdot 6+12=0;\quad M_C=42\ \text{tfm}.$$

Problema VI.22. Diagramele N, T și M (fig. VI.22).
Calculul reacțiunilor:

Se separă cadrul triplu articulat ACB și se rezolvă. Reacțiunile din A și B sînt acțiuni pentru consolele AG și BH.

$$\sum M_B=0;\quad V_A\cdot 10-2\cdot 3\cdot 8{,}5+15=0;\quad V_A=3{,}6\ \text{tf}$$

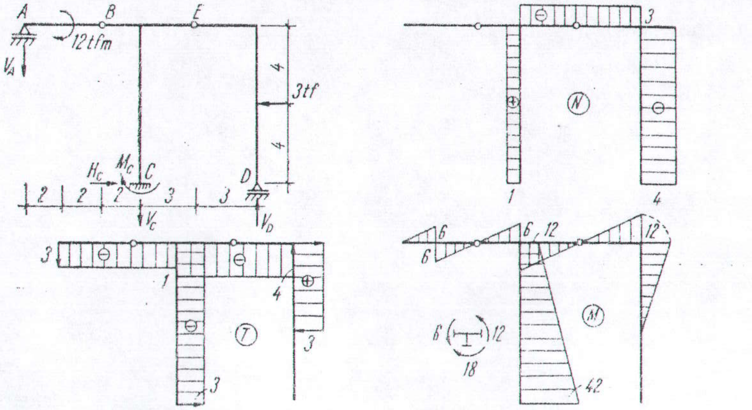


Fig. VI.21.

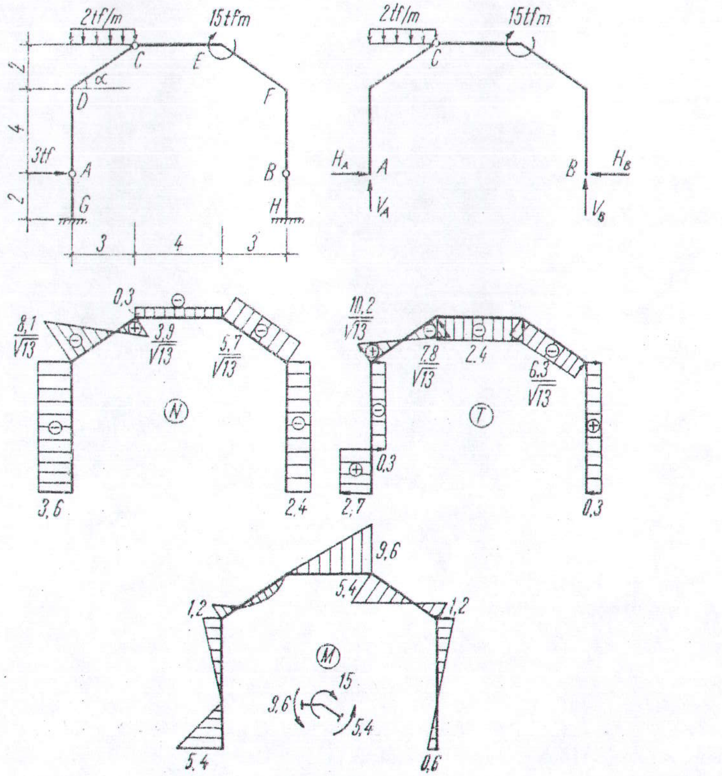


Fig. VI.22.

$$\sum Y=0;\quad V_A+V_B-6=0;\quad V_B=2{,}4 \text{ tf}.$$

$$M_{iC}=0;\quad V_A\cdot 3-H_A\cdot 6-2\cdot 3\cdot 1{,}5=0;\quad H_A=0{,}3 \text{ tf}.$$

$$\sum X=0;\quad H_A=H_B=0{,}3 \text{ tf}.$$

$$V_G=V_A=3{,}6 \text{ tf};\ H_G=3-0{,}3=2{,}7 \text{ tf};\ M_G=2{,}7\cdot 2=5{,}4 \text{ tfm}.$$

$$V_H=V_B=2{,}4 \text{ tf};\ H_H=H_B=0{,}3 \text{ tf};\ M_H=0{,}3\cdot 2=0{,}6 \text{ tfm}.$$

Calculul eforturilor

$$\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{13}};\quad \cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$N_{DC}=-V_A\sin\alpha-H_A\cdot\cos\alpha=-\frac{8{,}1}{\sqrt{13}} \text{ tf}$$

$$N_{CD}=-N_{DC}+2\cdot 3\cdot\sin\alpha=\frac{3{,}9}{\sqrt{13}} \text{ tf}$$

$$N_{FE}=-V_B\sin\alpha-H_B\cos\alpha=-\frac{5{,}7}{\sqrt{13}} \text{ tf}$$

$$T_{DC}=+V_A\cos\alpha-H_A\sin\alpha=\frac{10{,}2}{\sqrt{13}} \text{ tf}$$

$$T_{CD}=T_{DC}-2\cdot 3\cdot\cos\alpha=\frac{7.8}{\sqrt{13}} \text{ tf}$$

$$T_{FF}=-V_B\cos\alpha+H_B\sin\alpha=\frac{6{,}3}{\sqrt{13}} \text{ tf}.$$

Problema VI.23. Diagramele N, T şi M (fig. VI.23).

Calculul reacţiunilor:

$$\sum M_B=0;\quad V_A\cdot 8+2\cdot 8-3\cdot 6\cdot 7+4\cdot 2=0;\quad V_A=12{,}75 \text{ tf}$$

$$\sum Y=0;\quad V_A+V_B-3\cdot 6=0;\quad V_B=9{,}25 \text{ tf}$$

$$M_{iC}=0;\quad -H_B\cdot 10-4\cdot 6+9{,}25\cdot 4=0;\quad H_B=1{,}3 \text{ tf}$$

$$\sum X=0;\quad H_A+H_B-2=0;\quad H_A=0{,}7 \text{ tf}.$$

Problema VI.24. Diagramele N, T şi M (fig. VI.24).

Calculul reacţiunilor:

$$M_{iF}^{d}=0;\quad -V_C\cdot 4+2\cdot 6+2\cdot 4\cdot 2=0;\quad V_C=7 \text{ tf}$$

$$\sum M_B=0;\quad V_A\cdot 8-4\cdot 6+2\cdot 4\cdot 4-7\cdot 6=0;\quad V_A=4{,}25 \text{ tf}$$

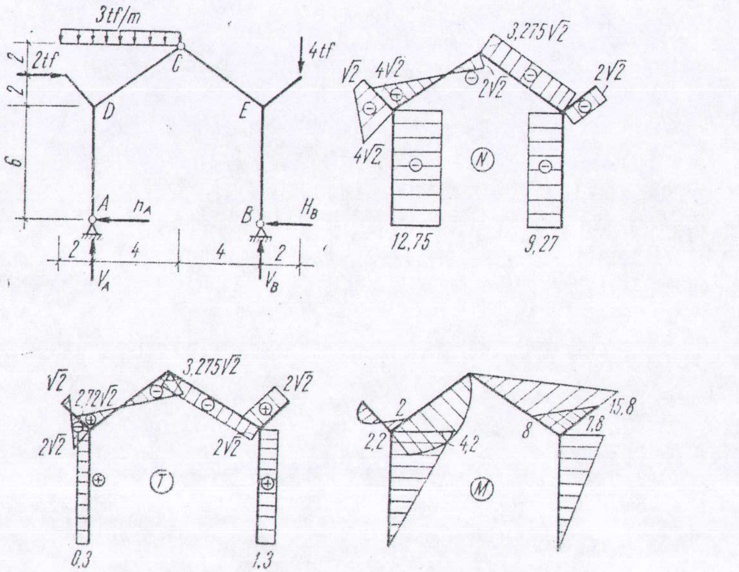


Fig. VI.23.

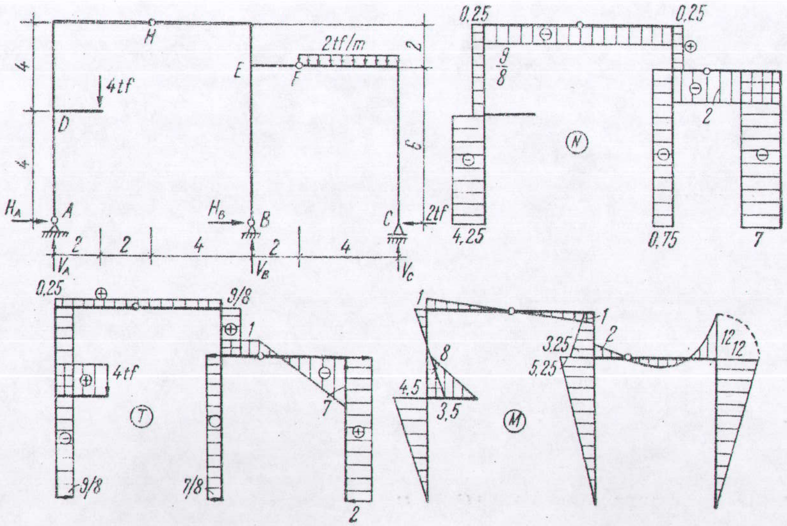


Fig. VI.24.

$$\sum Y=0;\quad V_A+V_B+V_G-4-2\cdot 4=0;\quad V_B=0{,}75 \text{ tf}$$

$$M^s_{iII}=0;\quad V_A\cdot 4-H_A\cdot 8-4\cdot 2=0;\quad H_A=\frac{9}{8}\text{ tf}$$

$$\sum X=0;\quad H_A+H_B-2=0;\quad H_B=\frac{7}{9}\text{ tf.}$$

Problema VI.25. Diagramele N, T și M (fig. VI.25).

Calculul reacțiunilor:

Sînt de determinat șase reacțiuni V_D, V_A, H_A, V_B, H_B și V_G, pentru aceasta se pot scrie trei ecuații de echilibru static și trei ecuații de moment încovoietor zero în articulațiile interioare E, C și F.

$$M^s_{iE}=0;\quad V_D\cdot 3-4\cdot 1{,}5=0;\quad V_D=2 \text{ tf}$$

$$M^d_{iF}=0;\quad -V_G\cdot 3+2\cdot 3\cdot 1{,}5=0;\quad V_G=3 \text{ tf}$$

$$\sum M_B=0;\quad V_D\cdot 8-4\cdot 6{,}5-3\cdot 3+V_A\cdot 4+2\cdot 3\cdot 2{,}5-V_G\cdot 4=0;\quad V_A=4 \text{ tf,}$$

$$\sum Y=0;\quad V_B=1 \text{ tf}$$

$$M_{iC}=0;\quad V_D\cdot 6-4\cdot 4{,}5+3\cdot 3+V_A\cdot 2-H_A\cdot 6=0$$

$$H_A=\frac{11}{6}\text{ tf};\quad H_B=\frac{7}{6}\text{ tf.}$$

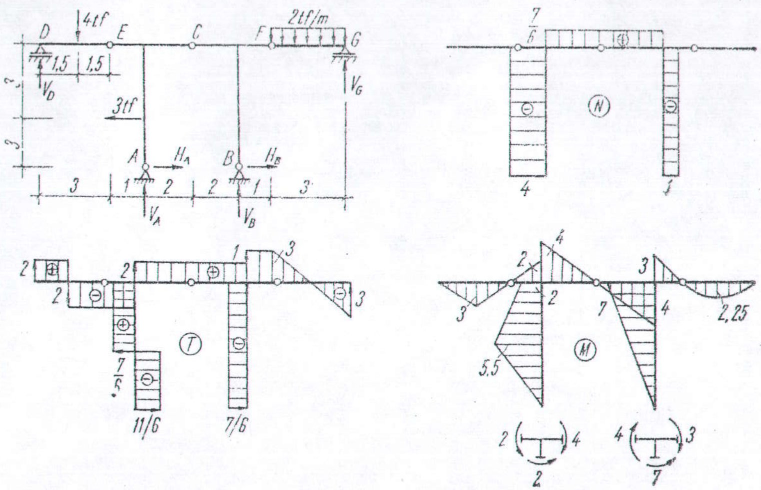


Fig. VI.25.

Problema VI.26. Diagramele N, T și M (fig. VI.26).

Calculul reacțiunilor:

$$\sum M_B=0;$$

$$20+4\cdot 10-V_A\cdot 10=0;$$

$$V_A=6 \text{ tf}\quad V_B=6 \text{ tf}$$

$$M_{iC}=0;$$

$$-V_A\cdot 5+H_A\cdot 10=0;$$

$$H_A=3 \text{ tf};$$

$$H_B=1 \text{ tf.}$$

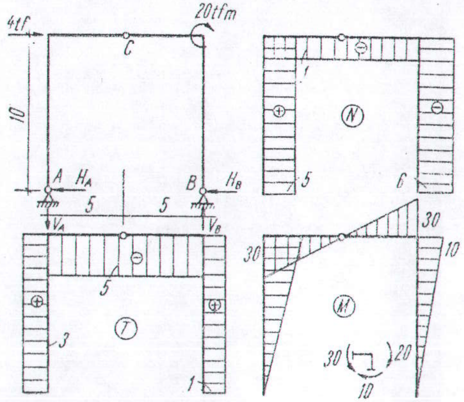


Fig. VI.26

Problema VI.27. Diagramele N, T și M (fig. VI.27).

Calculul reacțiunilor:

$$\sum M_B=0;$$

$$V_A\cdot 10+15-15=0;$$

$$V_A=0\quad V_B=0$$

$$M_{iC}=0;\quad -H_A\cdot 10+15=0;$$

$$H_A=1{,}5 \text{ tf};\quad H_B=1{,}5 \text{ tf.}$$

Încărcarea fiind simetrică, rezultă reacțiunile simetrice, diagramele N și M simetrice, iar diagrama T antisimetrică.

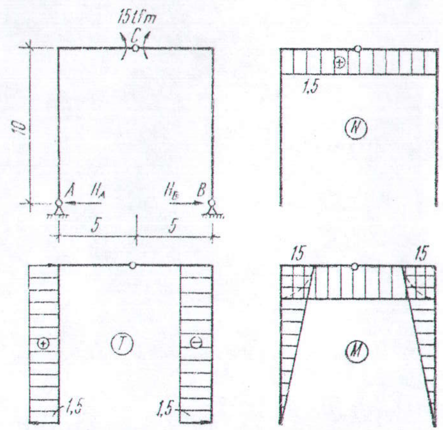


Fig. VI.27.

Probema VI.28. Diagramele N, T și M (fig. VI.28)

Să se traseze diagramele de eforturi N, T și M la cadrul simetric din figură încărcat simetric (cadrul este simetric în raport cu o axă verticală prin articulația din C).

Calculul reacțiunilor:

Sistemul fiind simetric și încărcat simetric, reacțiunile sînt simetrice.

$$\sum M_B=0;\quad V_A\cdot 8-6\cdot 6-6\cdot 2=0;$$

$$V_A=6 \text{ tf.}$$

Din condiția de simetrie rezultă $V_B=V_A$, adică $V_B=6$ tf.

$M_{iC}=0$; $V_A\cdot 4-6\cdot 2-H_A\cdot 6=0$; $H_A=2$ tf; $H_B=H_A=2$ tf.

Diagramele N și M sînt simetrice, iar diagrama T antisimetrică.

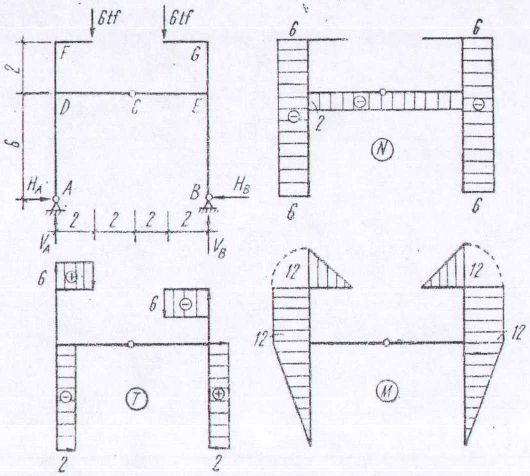


Fig. VI. 28.

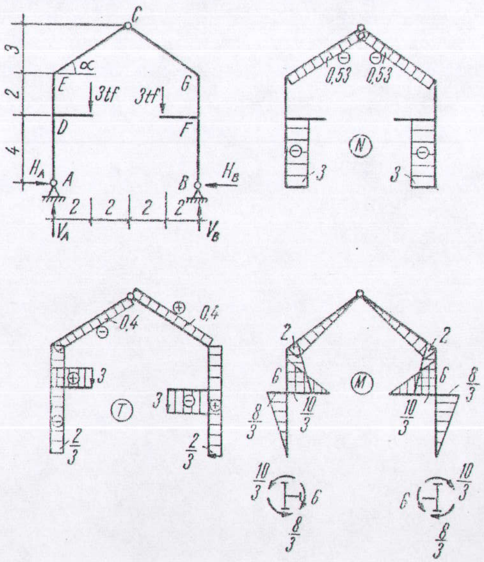


Fig. VI.29.

Problema VI.29. Diagramele N, T și M (fig. VI.29).

Calculul reacțiunilor:

$$\sum M_B=0;$$
$$V_A\cdot 8-3\cdot 6-3\cdot 2=0;$$
$$V_A=3 \text{ tf}; \quad V_B=3 \text{ tf}$$
$$M_{iC}=0;$$
$$V_A\cdot 4-H_A\cdot 9-3\cdot 2=0;$$
$$H_A=\frac{2}{3}\text{ tf}; \ H_B=\frac{2}{3}\text{ tf}.$$

Calculul eforturilor:

$$\sin\alpha=0{,}6; \quad \cos\alpha=0{,}8$$
$$N_{EC}=-H_A\cos\alpha=-\frac{8}{15}\text{ tf}=-0{,}53 \text{ tf}$$

$N_{GC}=N_{EC}$ din condiția de simetrie.

$$T_{EC}=-H_A\sin\alpha=-\frac{2}{5}=-0{,}4 \text{ tf}.$$

Problema VI.30. Diagramele N, T și M (fig. VI.30).

Cadrul are o încărcare oarecare. Se descompune încărcarea dată într-o încărcare simetrică și una antisimetrică (ca în figură).

Se observă direct (sau prin calcul) că încărcarea simetrică produce numai eforturi axiale — de compresiune — pe riglă. Celelalte eforturi sînt nule.

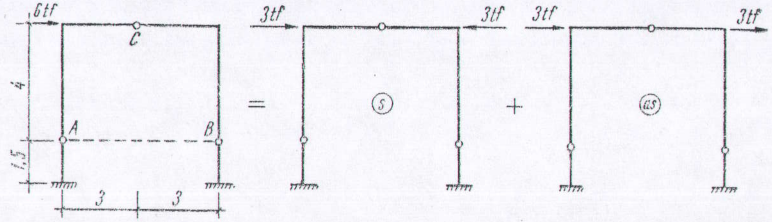


Fig. VI.30.

Se va studia numai cadrul încărcat antisimetric, pentru care se vor determina reacțiunile și trasa diagramele de eforturi N, T și M.

Diagramele finale — și deci eforturile reale pentru sistemul dat cu încărcarea inițială — se obțin însumînd eforturile din cele două moduri de încărcare. În cazul de față, diagramele T și M din încărcarea antisimetrică sînt cele finale. Numai diagrama N se obține însumînd diagramele N_s și N_{as}.

Cadrul încărcat antisimetric

Calculul reacțiunilor. Se determină reacțiunile pentru cadrul ABC triplu articulat, și cu aceste reacțiuni aplicate ca acțiuni — dar de sens contrar — se rezolvă consolele AD și BE.

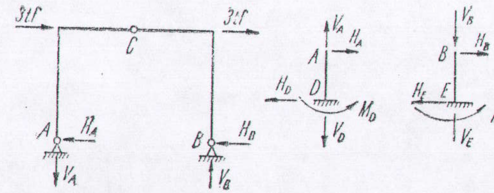


Fig. VI.31.

$$\sum M_B=0; \quad -V_A\cdot 6+3\cdot 4+3\cdot 4=0; \quad V_A=4 \text{ tf}$$
$$\sum Y=0; \quad -V_A+V_B=0; \quad V_B=4 \text{ tf}$$
$$M_{iC}=0; \quad -V_A\cdot 3+H_A\cdot 4=0; \quad H_A=3 \text{ tf}$$
$$\sum X=0; \quad H_A+H_B-3-3=0; \quad H_B=3 \text{ tf}.$$

Consola AD:

$V_D=V_A=4$ tf; $H_D=H_A=3$ tf; $-M_D+H_A\cdot 1{,}5=0$; $M_D=4{,}5$ tfm

Consola BE:

$V_E=V_B=4$ tf; $H_E=H_B=3$ tf; $-M_E+H_B\cdot 1{,}5=0$; $M_E=4{,}5$ tfm.

Încărcarea fiind antisimetrică au rezultat reacțiunile antisimetrice. Diagramele N_{as} și M_{as} rezultă antisimetrice, iar diagrama T_{as} simetrică. Diagramele din încărcarea antisimetrică sînt date în figura VI.32.

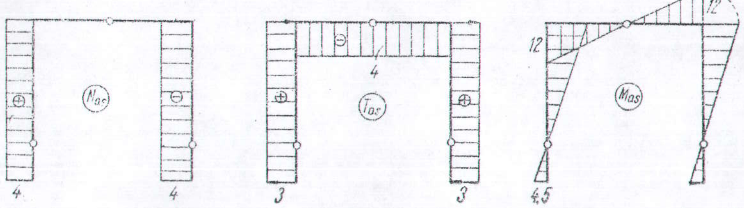


Fig. VI.32.

Diagramele finale sînt date în figura VI.33.

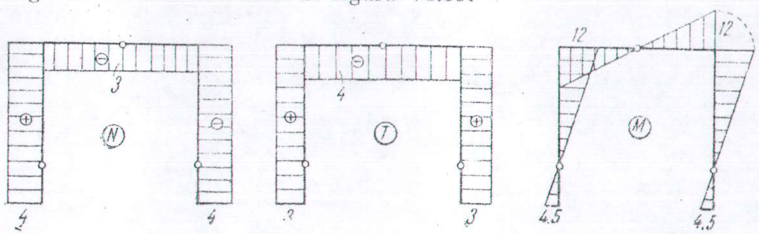


Fig. VI.32.

Problema VI.31. Diagramele N, T și M (fig. VI.34).

Calculul reacțiunilor

Sistemul este simetric, încărcat simetric.

$$M^s_{iE}=0;\quad V_A\cdot 3-2\cdot 6=0;\quad V_A=4\ \text{tf};\quad V_D=V_A=4\ \text{tf}.$$

$$\Sigma M_C=0;\quad V_A\cdot 18-V_B\cdot 12-6+6-V_D\cdot 6=0;\quad V_B=4\ \text{tf};\quad V_C=4\ \text{tf}.$$

$$M_{iF}=0;\quad V_A\cdot 12-2\cdot 12-V_B\cdot 6+H_B\cdot 12-6=0;\quad H_B=0{,}5\ \text{tf};\quad H_C=0{,}5\ \text{tf}.$$

Problema VI.32. Diagramele N, T și M (fig. VI.35).

Calculul reacțiunilor:

— *Cadrul DEF*

$$\Sigma M_E=0;\quad 4\cdot 6-V_D\cdot 8=0;\quad V_D=3\ \text{tf};\quad V_E=V_D=3\ \text{tf}.$$

$$M_{iF}=0;\quad -V_D\cdot 4+H_D\cdot 6=0;\quad H_D=2\ \text{tf};\quad H_E=2\ \text{tf},$$

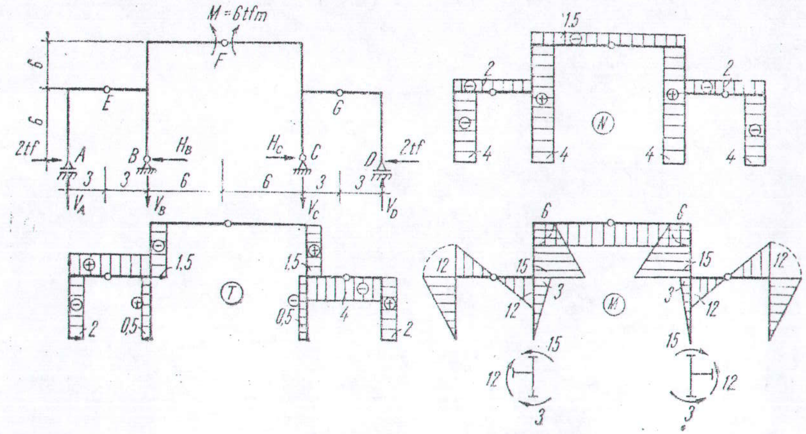


Fig. VI.34.

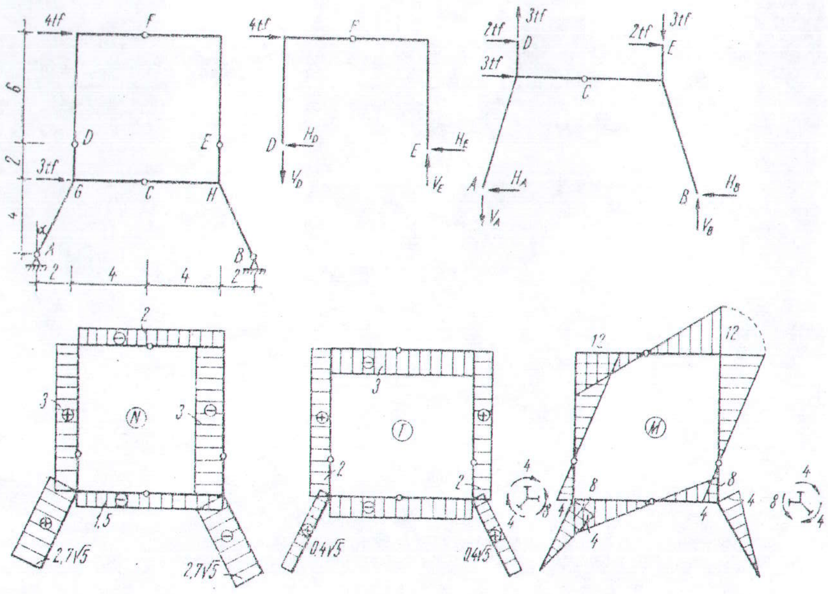


Fig. VI.35.

— *Cadrul ADEB*

$$\sum M_B=0;\quad 2\cdot 6+2\cdot 6+3\cdot 4+3\cdot 10-3\cdot 2-V_A\cdot 12=0;\quad V_A=5 \text{ tf};\quad V_B=5 \text{ tf}$$

$$M_{iC}=0;\quad 2\cdot 2+3\cdot 4+H_A\cdot 4-V_A\cdot 6=0;\quad H_A=3{,}5 \text{ tf};\quad H_B=3{,}5 \text{ tf}$$

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}};\quad \cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Problema VI.33. Diagramele N, T şi M (fig. VI.36).

Calculul reacţiunilor se efectuează obişnuit, ca pentru un corp nedeformabil, avînd ca reazeme o articulaţie şi un reazem simplu.

$$\sum M_B=0;\quad 4\cdot 4-V_A\cdot 8=0$$

$$V_A=2 \text{ tf};\quad V_B=2 \text{ tf};\quad H_A=4 \text{ tf}.$$

Pentru determinarea eforturilor se separă sistemele: CDE, FGH (care sînt cadre triplu articulate) şi $DEFG$ şi se calculează reacţiunile din articulaţiile

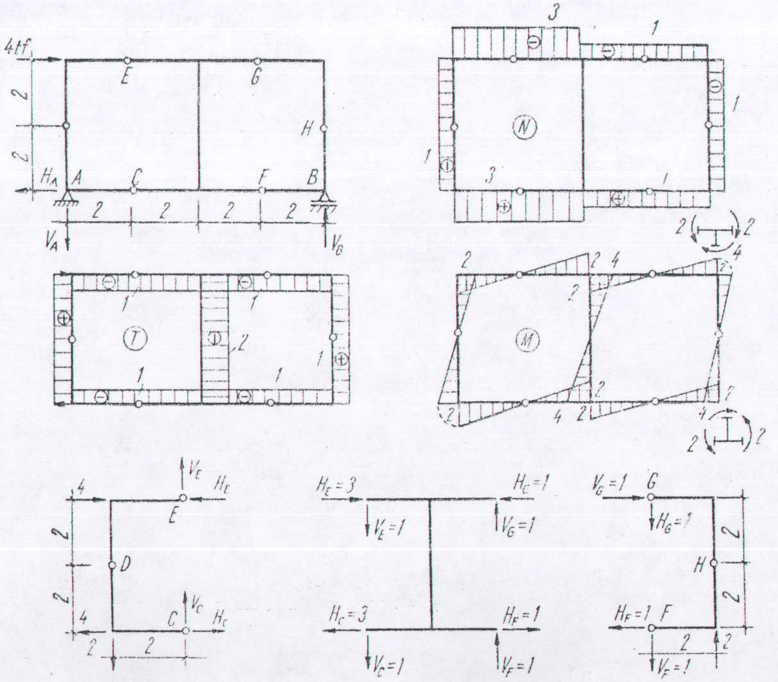


Fig. VI.36.

interioare $CEFG$. Cu reacţiunile astfel calculate se trasează diagramele de eforturi.

— *Cadrul CDE*

$$\sum M_E=0;\quad -H_C\cdot 4-2\cdot 2+4\cdot 4=0;\quad H_C=3 \text{ tf};\quad H_E=3 \text{ tf}.$$

$$M_{iD}=0;\quad -H_C\cdot 2+4\cdot 2-V_C\cdot 2=0;\quad V_C=1 \text{ tf};\quad V_E=1 \text{ tf}.$$

În mod asemănător se rezolvă şi cadrele FGH şi $CEFG$, rezultînd reacţiunile din figură.

Problema VI.34. Diagramele N, T şi M (fig. VI.37).

Pentru structura de la aplicaţia (I.8) să se traseze diagramele de eforturi N, T şi M.

Reacţiunile au fost calculate la aplicaţia (I.8) şi au rezultat următoarele valori:

$$V_A=0{,}75 \text{ tf};\quad V_B=6{,}75 \text{ tf};$$
$$H_A=1 \text{ tf};\quad H_B=7 \text{ tf}.$$
$$V_D=2{,}25 \text{ tf};\quad V_E=2{,}25 \text{ tf};$$
$$H_D=4{,}5 \text{ tf};\quad H_E=1{,}5 \text{ tf}.$$

Problema VI.35. Diagramele N, T şi M (fig. VI.38).

Reacţiunile din legăturile cu terenul:

$$V_G=V_I=7 \text{ tf};\quad H_G=H_I=3 \text{ tf}.$$

Reacţiunile din articulaţiile interioare sînt trecute direct pe figură.

Problema VI. 36. Diagramele N, T şi M (fig. VI.39).

Calculul reacţiunilor:

$$M^s_{iE}=0;\quad V_A\cdot 8=0;\quad V_A=0$$

$$\sum M_C=0;\quad V_B\cdot 8+2\cdot 6-2\cdot 4\cdot 6-12=0;\quad V_B=6 \text{ tf}.$$

$$\sum Y=0;\quad V_B+V_C-2\cdot 4=0;\quad V_C=2 \text{ tf}.$$

$$M^d_{iH}=0;\quad H_C\cdot 8-12-V_C\cdot 4=0;\quad H_C=2{,}5 \text{ tf}.$$

$$\sum X=0;\quad 2+H_B-H_C=0;\quad H_B=0{,}5 \text{ tf}.$$

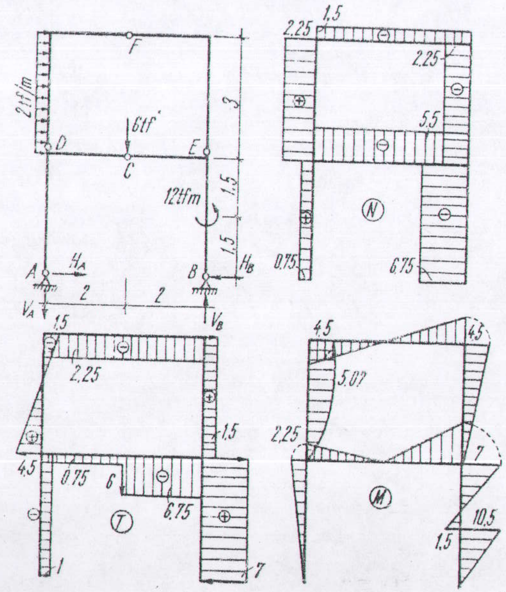


Fig. VI.37.

Verificare:

$$M^{s}_{iH}=0;\quad V_B\cdot 4-2\cdot 2-2\cdot 4\cdot 2-H_B\cdot 8=0;\quad 24-4-16-4=0$$

Calculul eforturilor:

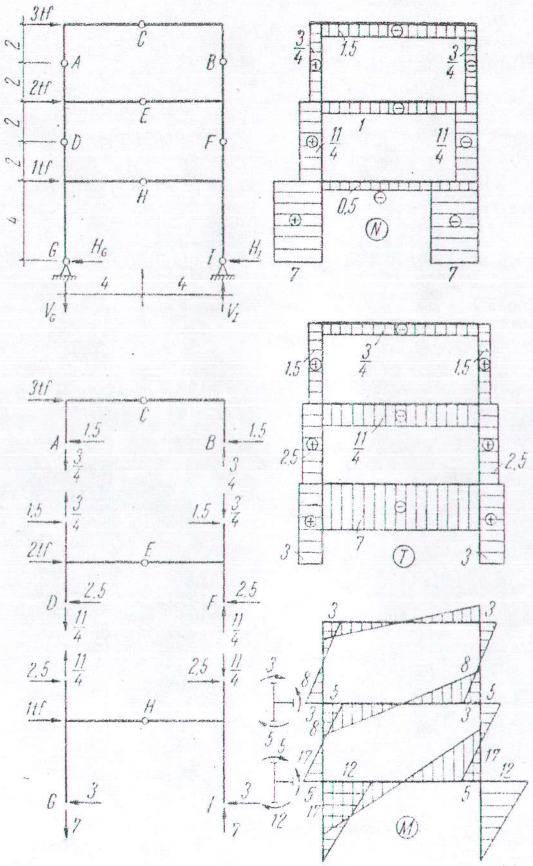


Fig. VI.38.

$$\cos\alpha=\frac{4}{\sqrt{20}}=\frac{2}{\sqrt{5}};\qquad \sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{20}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$N_{DG}=-2\cos\alpha=-\frac{4}{\sqrt{5}}\ \text{tf};\qquad N_{GE}=-2\cos\alpha=\frac{4}{\sqrt{5}}\ \text{tl}$$

$$N_{EH}=-(2+0{,}5)\cos\alpha-6\sin\alpha=-\frac{11}{\sqrt{5}}\ \text{tf}$$

$$N_{HE}=-N_{EH}+2\cdot 4\cdot\sin\alpha=-\frac{3}{\sqrt{5}}\ \text{tf}$$

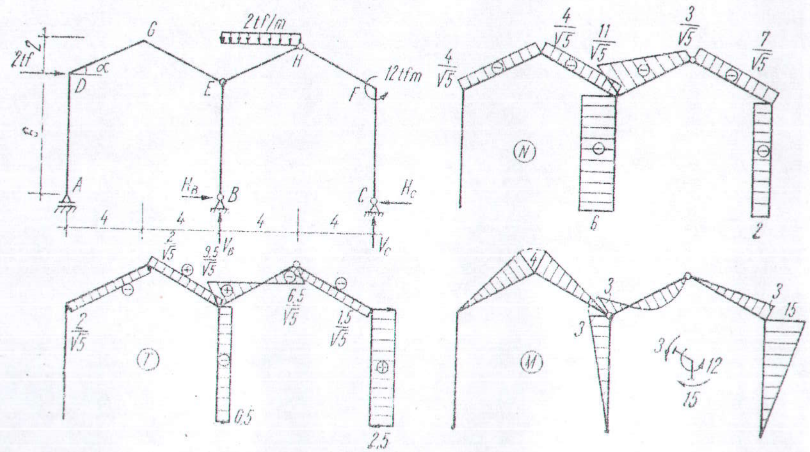


Fig. VI.39.

$$N_{FH}=-V_C\cdot\sin\alpha-H_C\cos\alpha=-\frac{7}{\sqrt{5}}\ \text{tf}$$

$$T_{DG}=-2\sin\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}\ \text{tf};\qquad T_{GE}=+2\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}\ \text{tf}$$

$$T_{EH}=-(2+0{,}5)\sin\alpha+V_B\cos\alpha=\frac{9{,}5}{\sqrt{5}}\ \text{tf}$$

$$T_{HE}=T_{EH}-2\cdot 4\cos\alpha=-\frac{6{,}5}{\sqrt{5}}\ \text{tf}$$

$$T_{FH}=H_C\cdot\sin\alpha-V_C\cdot\cos\alpha=-\frac{1{,}5}{\sqrt{5}}\ \text{tf}.$$

Problema VI.37. Diagramele N, T și M (fig. VI.40).

Calculul reacțiunilor:

$$M^{d}_{iH}=0;\quad 3\cdot 2+V_C\cdot 4-H_C\cdot 8=0$$

$$M^{d}_{iE}=0;\quad V_C\cdot 6-H_C\cdot 6=0;\quad V_C=1{,}5\ \text{tf};\quad H_C=1{,}5\ \text{tf}$$

$$\sum M_B=0;\quad V_A\cdot 6-3\cdot 4\cdot 4-3\cdot 6+V_C\cdot 6=0;\quad V_A=9{,}5\text{ tf};\quad V_B=4{,}0\text{ tf}$$

$$M^s_{iG}=0;\, V_A\cdot 4-3\cdot 4\cdot 2-H_A\cdot 8=0;\quad H_A=1{,}75\text{ tf},\quad H_B=0{,}25\text{ tf}.$$

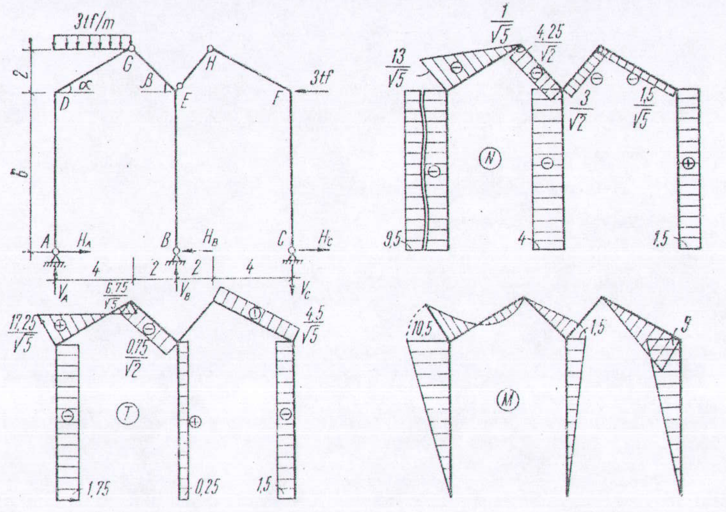


Fig. VI.40.

Calculul eforturilor:

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \beta=45^\circ$$

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}};\qquad \sin\beta=\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$N_{DG}=-V_A\sin\alpha-H_A\cos\alpha=-\frac{13}{\sqrt{5}}\text{ tf}$$

$$N_{GD}=N_{DG}+3\cdot 4\cdot\sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}\text{ tf}$$

$$N_{GE}=-(3\cdot 4+H_A-V_A)\frac{\sqrt{2}}{2}=-4{,}25\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{4{,}25}{\sqrt{2}}\text{ tf}$$

$$N_{EH}=-(V_A+H_A-3\cdot 4+V_B-H_B)\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{3{,}0}{\sqrt{2}}\text{ tf}$$

$$N_{FH}=-3\cdot\cos\alpha+1{,}5\cos\alpha+1{,}5\sin\alpha=\frac{1{,}5}{\sqrt{5}}\text{ tf}$$

$$T_{DG}=V_A\cos\alpha-H_A\sin\alpha=\frac{17{,}25}{\sqrt{5}}\text{ tf}$$

$$T_{GD}=T_{DG}-3\cdot 4\cdot\cos\alpha=-\frac{6{,}75}{\sqrt{5}}\text{ tf}$$

$$T_{GE}=(-12+9{,}5+1{,}75)\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{0{,}75}{\sqrt{2}}\text{ tf}$$

$$T_{FH}=3\cos\alpha-1{,}5\cos\alpha+1{,}5\sin\alpha=\frac{4{,}5}{\sqrt{5}}\text{ tf}$$

Problema VI.38. Diagramele N, T şi M (fig. VI.41).

Sistemul se rezolvă prin separarea următoarelor structuri componente:
- cadrul cu trei articulaţii ABC;
- cadrele cu o articulaţie şi un reazem simplu $DEFA$ şi $GBIH$.

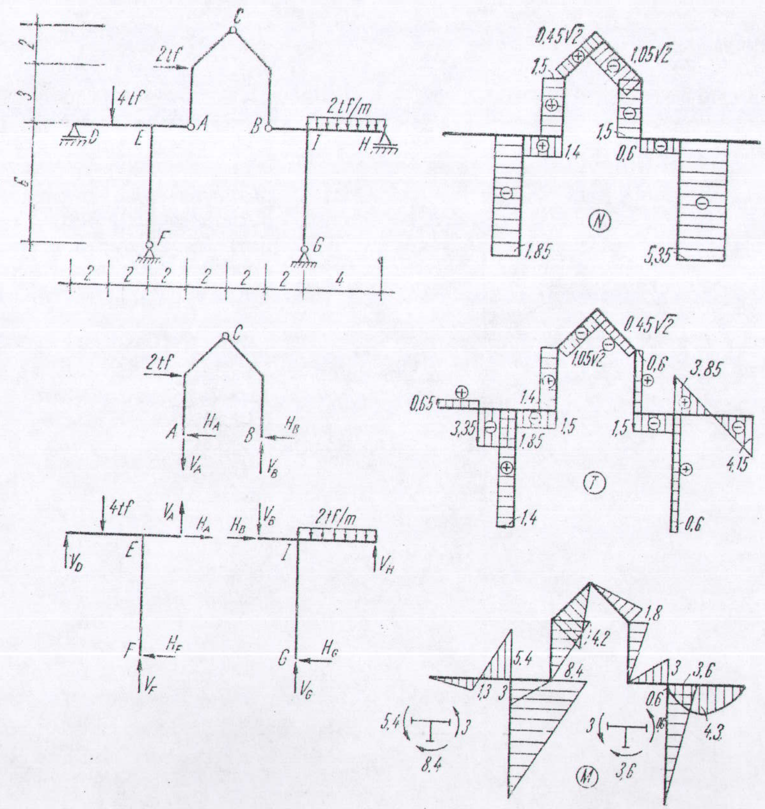


Fig. VI.41.

Calculul reacţiunilor:

— *Cadrul ABC*

$$\Sigma M_B=0; \quad -V_A\cdot 4+2\cdot 3=0; \quad V_A=1,5\ \text{tf}; \quad V_B=1,5\ \text{tf}$$

$$M_{iC}=0; \quad H_B\cdot 5-V_B\cdot 2=0; \quad H_B=0,6\ \text{tf}; \quad H_A=1,4\ \text{tf}.$$

— *Cadrul GBIH:*

$$\Sigma M_G=0; \quad -V_H\cdot 4+2\cdot 4\cdot 2-1,5\cdot 2+0,6\cdot 6=0$$

$$V_H=4,15\ \text{tf}; \quad V_G=5,35\ \text{tf}; \quad H_G=0,6\ \text{tf}.$$

— *Cadrul DEFA:*

$$\Sigma M_F=0; \quad V_D\cdot 4-4\cdot 2-1,5\cdot 2+1,4\cdot 6=0$$

$$V_D=0,65\ \text{tf}; \quad V_F=1,85\ \text{tf}; \quad H_F=1,4\ \text{tf}.$$

Problema VI.39. Diagramele N, T şi M (fig. VI.42).

Rezolvarea sistemului se face pornind de la stabilirea solicitărilor ce acţionează asupra cadrului cu trei articulaţii $GFEGD$. Reacţiunile din C şi D vor fi acţiuni pe consolele CA şi DB.

Barele FH şi HE sînt dublu articulate şi încărcate numai în articulaţia (nodul) H. Izolînd nodul H, rezultă eforturile $FH=0$ şi $HE=3$ tf (efort de compresiune).

Bara EI este o grindă simplu rezemată, încărcată cu o sarcină uniform distribuită, reacţiunile sînt egale $V_E=V_I=4$ tf.

Bara IG este dublu articulată, încărcată cu o sarcină de 4 tf egală şi de sens contrar cu V. Efortul în bară este de compresiune şi egal cu 4 tf.

Asupra cadrului $CFEGD$ vor acţiona forţele din figură:

Forţa orizontală de 3 tf în E egală cu efortul HE.

Forţa verticală de 4 tf în E egală cu reacţiunea V_E de la grinda EI.

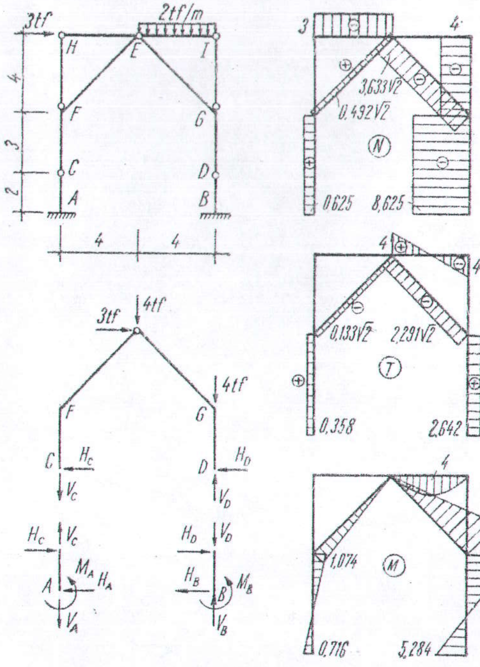


Fig. VI.42.

Forţa verticală de 4 tf în G egală cu efortul IG.

Calculul reacţiunilor:

$$\Sigma M_D=0; \quad -V_C\cdot 8+3\cdot 7-4\cdot 4=0; \quad V_C=0,625\ \text{tf}; \quad V_D=8,625\ \text{tf}$$

$$M^s_{iE}=0; \quad -V_C\cdot 4+H_C\cdot 7=0; \quad H_C=0,358\ \text{tf}; \quad H_D=2,642\ \text{tf}$$

$$V_A=V_C=0,625\ \text{tf}; \quad H_A=H_C=0,358\ \text{tf}; \quad M_A=0,716\ \text{tfm}$$

$$V_B=V_D=8,625\ \text{tf}; \quad H_B=H_D=2,642\ \text{tf}; \quad M_B=5,284\ \text{tfm}.$$

Problema VI.40. La structura din figura VI.43 să se determine M_i şi T_j cu ajutorul lucrului mecanic virtual.

Determinarea momentului M_i:

$$\theta_1=\theta_2=1; \quad \frac{\theta_3}{\eta}=\frac{\theta_2}{\eta}; \quad \theta_3=\theta_2=1$$

$$\eta_1=\theta_2\cdot 2; \quad \eta_1=2; \quad \eta_2=\theta_1\cdot 8; \quad \eta_2=8$$

$$-M\cdot\theta_1-M\cdot\theta_3+2\cdot\eta_2+4\cdot\eta_1=0$$

$$M=12\ \text{tfm}.$$

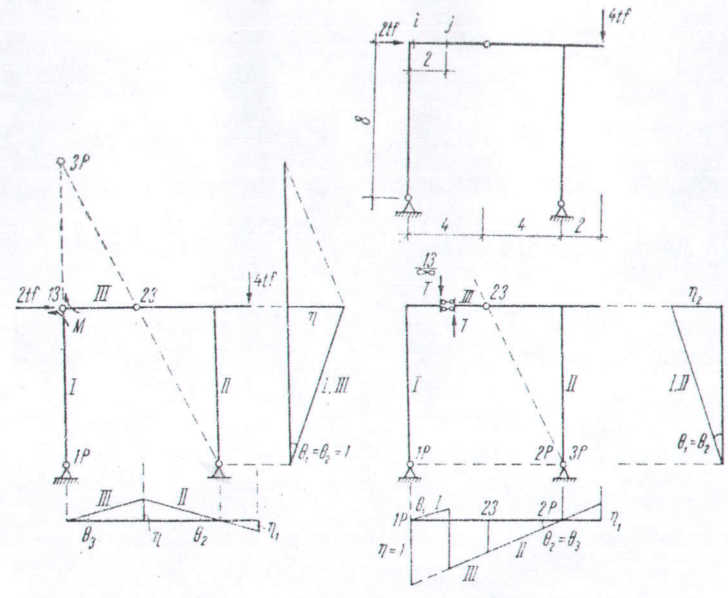


Fig. VI.43.

Determinarea forței tăietoare T_j

Corpurile *I* și *III* sînt paralele în epura de deplasări. Corpurile *II* și *III* sînt în prelungire, avînd două puncte comune (centrul relativ *23* și centrul absolut).

$$\theta_1=\theta_2=\theta_3=\frac{1}{8}$$

$$\eta_1=\theta_2\cdot 2=\frac{1}{4};\qquad \eta_2=\theta_2\cdot 8=1$$

$$-T\cdot 1-4\cdot\eta_1-2\cdot\eta_2=0;\qquad T=-3\ \text{tf}.$$

Problema VI.41. La structura din figura VI.44 să se determine M_i cu ajutorul lucrului mecanic virtual.

Determinarea poziției centrului absolut 3 p:

$$\Delta(23,\ B,\ 2p)\sim\Delta(3p,\ A,\ 2p)$$

$$\frac{6}{6}=\frac{y-2}{12};\qquad y=14\ \text{m}$$

$$\theta_3=\frac{6}{14}=\frac{3}{7};\qquad \theta_2=\theta_3=\frac{3}{7}$$

$$\eta_1=\theta_3\cdot 8=\frac{24}{7};$$

$$\eta_3=\theta_2\cdot 2=\frac{6}{7};$$

$$\eta_2=\theta_1\cdot 2=\frac{8}{7}$$

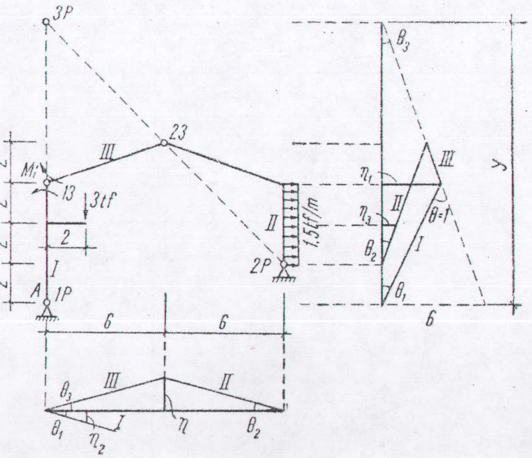


Fig. VI.44.

$$\theta_1=\frac{24}{7}\cdot\frac{1}{6}=\frac{4}{7};$$

$$\theta=\theta_1+\theta_3=1$$

$$-M\cdot\theta-3\cdot\eta_2+$$
$$+1,5\cdot 4\cdot\eta_3=0;$$
$$M=8,55\ \text{tfm}.$$

Problema VI.42. Să se determine cu ajutorul lucrului mecanic virtual M_i la structura din figura VI.45.

$$\theta_{23}=1=\theta_3+\theta_2;$$
$$\eta=\theta_{23}\cdot 6=6$$

Poziția centrului absolut 3 p:

$$\Delta(3\,p,\ 13,\ 23)\sim\Delta(3\,p,\ 1\,p,\ 2\,p)$$

$$\frac{y}{3}=\frac{y+6}{8};\qquad y=3,6\ \text{m};$$

$$\frac{\eta_1}{y}=\frac{\eta}{9,6};\qquad \eta_1=2,25$$

$$\theta_2=\theta_1=\frac{2,25}{6}=0,375$$

$$\eta_2=\theta_1\cdot 8=3;$$

$$\eta_3=\theta_1\cdot 2,5=0,938$$

$$-M\cdot\theta_{23}-2\cdot 5\cdot\eta_3+4\cdot\eta_2=0;\qquad M=2,625\ \text{tfm}.$$

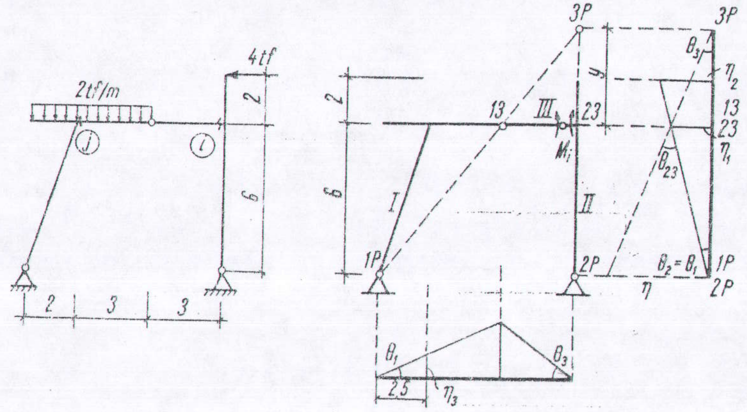


Fig. VI.45.

Problema VI.43. La structura de la aplicația (VI.42) să se determine T_j cu ajutorul lucrului mecanic virtual (fig. VI.46):

$$\theta_2=\theta_3=\frac{1}{8};$$

$\theta_1=\theta_2$ — corpurile *I* și *II* sînt paralele

$$\eta_1=\theta_3\cdot 4,5=\frac{4,5}{8};\qquad \eta_2=\theta_1\cdot 1=\frac{1}{8};$$

$$\eta_3=\theta_2\cdot 8=1$$

$$-T\cdot\eta-2\cdot 2\cdot\eta_2+2\cdot 3\cdot\eta_1+4\cdot\eta_3=0;$$
$$T=6,875\ \text{tf}.$$

Problema VI.44. La structura din figura VI.47 să se determine cu ajutorul lucrului mecanic virtual, efortul din tirant.

$$\frac{y}{3}=\frac{8}{3};\qquad y=8;\qquad \theta_{12}=1;\qquad \eta_5=8$$

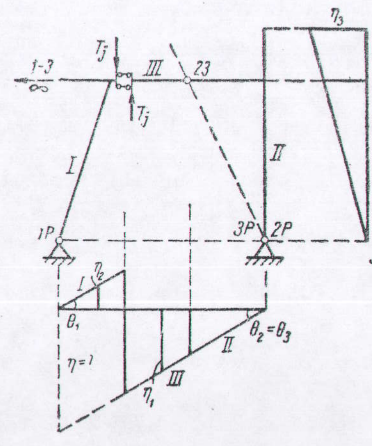


Fig. VI.46.

$$\theta_2=\frac{8}{16}=\frac{1}{2};\quad \theta_1+\theta_2=1;\quad \theta_1=\frac{1}{2};\quad \theta_1=\theta_2$$

$$\eta_2=14\cdot\theta_2=7$$

$$\eta_1=2\cdot\theta_1=1$$

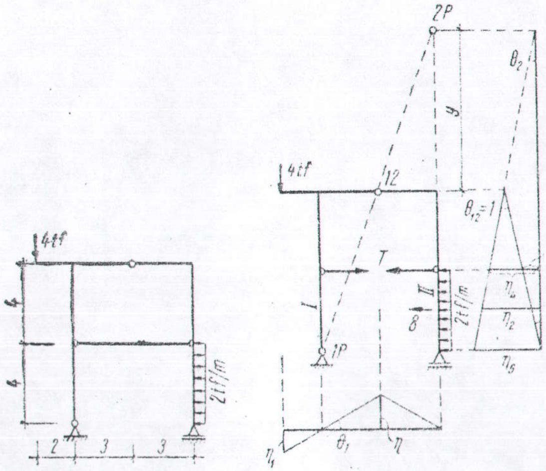


Fig. VI.47.

$$\eta_3=4\cdot\theta_1=2$$

$$\eta_4=12\cdot\theta_2=6$$

$$-T\cdot\eta_3+T\eta_4+2\cdot4\cdot\eta_2-4\cdot\eta_1=0$$

$$T=-15\ \text{tf}$$

Problema VI.45. La structura din figura VI.48 să se determine M_i cu ajutorul lucrului mecanic virtual.

Se alege: $\theta_1=\theta_3=1$.

Din epura de deplasări pe verticală rezultă:

$$\theta_2=\theta_3=1;\quad \theta_1=\frac{\eta_1}{2};\quad \theta_4=\frac{\eta_1}{4};\quad \theta_4=\frac{1}{2}\cdot\theta_1=\frac{1}{2}$$

$$\eta_1=2;\quad \eta_2=4;\quad \eta_3=\frac{1}{2}\cdot2=1;\quad \eta_4=1;\quad \eta_5=9.$$

$$-M\cdot\theta_1-M\cdot\theta_2-1\cdot4\cdot\eta_3-1\cdot2\cdot\eta_4+4\cdot\eta_5=0$$

$$-2M=+4+2-36;\quad M_2=15\ \text{tfm.}$$

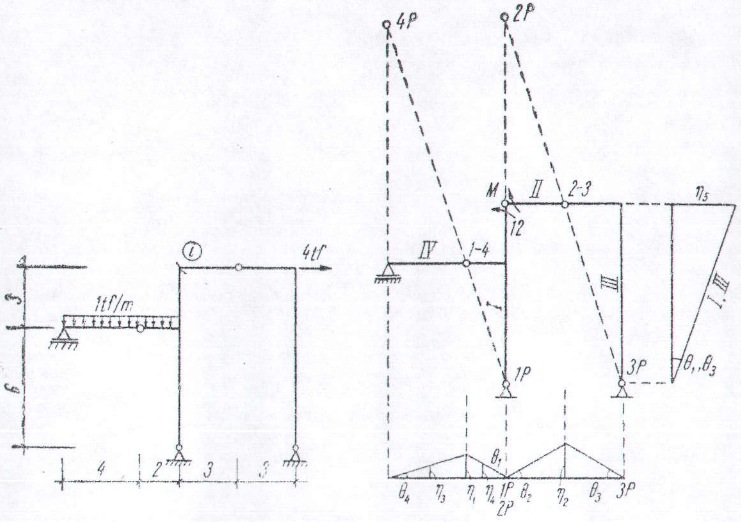


Fig. VI.48.

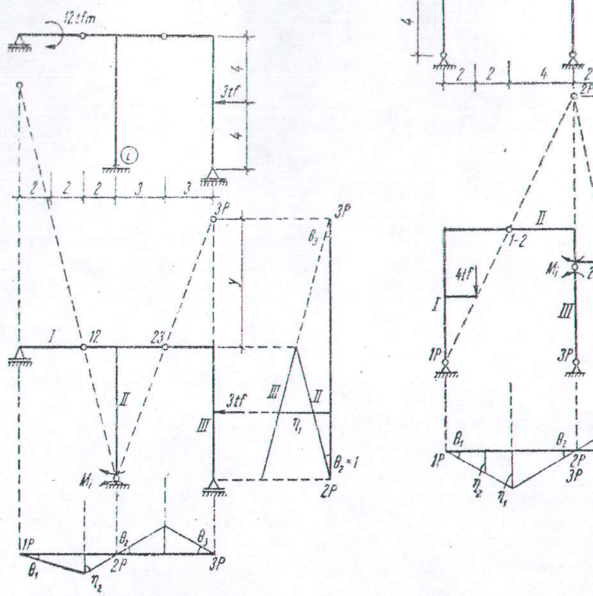


Fig. VI.49.

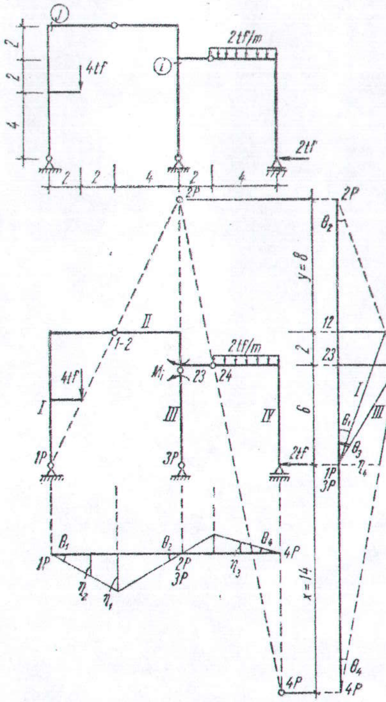


Fig. VI.50.

Problema VI.46. Să se determine M_i cu ajutorul lucrului mecanic virtual la structura din figura VI.49.

$$\frac{y}{3}=\frac{y+8}{6};\quad y=8;\quad \theta_2=\theta_3=1$$

$$\eta_1=\theta_3\cdot 12=12;\quad \eta_2=\theta_2\cdot 2=2;\quad \theta_1=\frac{\eta_2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$-M_i\cdot 1+12\cdot\theta_1+3\cdot\eta_1=0;\quad M_i=42\ \text{tfm.}$$

Problema VI.47. Să se determine cu ajutorul lucrului mecanic virtual M_i la structura din figura VI.50.

$$\frac{y}{4}=\frac{y+8}{8};\quad \frac{x+6}{4}=\frac{y+2}{2};$$

$$y=8;\quad x=14.$$

Alegînd $\theta_2=1$, rezultă:

$$\eta=\theta_2\cdot 10=10;$$

$$\eta_1=\theta_2\cdot 4=\theta_1\cdot 4;\quad \eta_2=2;$$

$$\eta_4=\theta_4\cdot 14=7$$

$$\theta_4=\frac{10}{20}=\frac{1}{2};\quad \theta_2=\theta_1=1;$$

$$\eta_1=4;\quad \eta_3=\theta_4\cdot 2=1;$$

$$\theta_3=\frac{\eta}{6}=\frac{5}{3}.$$

$$-M\cdot\theta_2-M\cdot\theta_3+4\cdot\eta_2-2\cdot 4\cdot\eta_3-2\cdot\eta_4=0;$$

$$M_i=-5{,}25\ \text{tfm.}$$

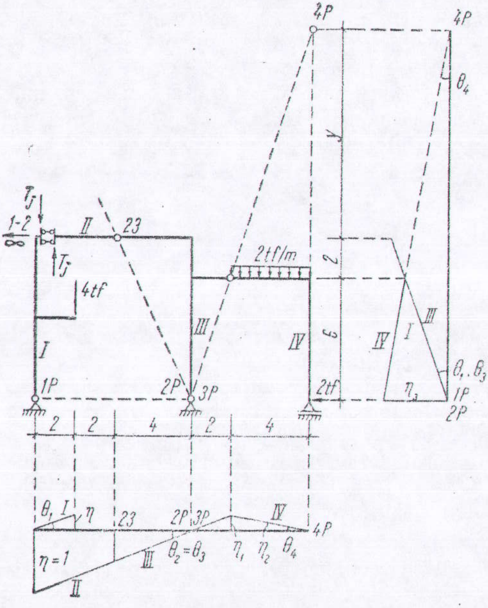


Fig. VI.51.

Momentul real are sensul invers celui considerat în calcul și tensionează fibra din stînga.

Problema VI.48. La structura de la aplicația (VI.47) să se determine T_j cu ajutorul lucrului mecanic virtual (fig. VI.51).

$$y=10\ \text{m};\quad \theta_1=\theta_2=\theta_3=\frac{1}{8};\quad \eta=\theta_1\cdot 2=\frac{1}{4}\quad \eta_1=\theta_2\cdot 2=\theta_4\cdot 4$$

$$\eta_1=\frac{1}{4};\quad \theta_4=\frac{1}{16};\quad \eta_2=\frac{1}{2}\,\eta_1=\frac{1}{8};\quad \eta_3=\theta_4\cdot 18=\frac{9}{8}.$$

$$-T\cdot 1-4\cdot\eta-2\cdot 4\cdot\eta_2+2\cdot\eta_3=0;\quad T=\frac{1}{4}\,\text{tf.}$$